

МИР
знаний

Р. Н. ЩЕРБАКОВ, Л. Ф. ПИЧУРИН

Дифференциалы помогают геометрии



МИР ЗНАНИЙ

Р. Н. ЩЕРБАКОВ, Л. Ф. ПИЧУРИН

Дифференциалы помогают геометрии

Книга для внеклассного чтения

IX—X классы

МОСКВА «ПРОСВЕЩЕНИЕ» 1982

ББК 22.124
Щ61

Рецензенты:

доктор физ-мат. наук, профессор *Кованцов Н. И.*
(Киевский государственный университет),
методист математики *Решетников Н. Н.*
(Красногвардейский роно г. Москвы).

Роман Николаевич Щербаков
Лев Федорович Пичурин

ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ПОМОГАЮТ ГЕОМЕТРИИ



Редактор *Л. М. Котова*. Художник *Б. Л. Николаев*. Художественный редактор *Е. Н. Карасик*. Технический редактор *Н. Н. Бажанова*.
Корректор *О. В. Ивашкина*.

ИБ № 6102

Сдано в набор 26 10 81. Подписано к печати 07 04.82. Бум. Книжно-журнальная Гарн. литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 10,08. Усл. кр. отт. 10,40. Уч.-изд. л. 9,05. Тираж 100000 экз. Заказ 218. Цена 25 коп. Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41. Отпечатано с матриц Саратовского ордена Трудового Красного Знамени полиграфического комбината Росглавполиграфпрома Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли в типографии № 2 Росглавполиграфпрома, г. Рыбинск, ул. Чкалова, 8. Заказ 1352.

Щербаков Р. Н., Пичурин Л. Ф.

Щ61 Дифференциалы помогают геометрии: Кн. для
внеклас. чтения. IX—X кл. — М.: Просвещение, 1982. —
192 с., ил. — (Мир знаний).

Книга посвящена истории возникновения и развития дифференциальной геометрии. Авторы в популярной форме излагают основные результаты классической дифференциальной геометрии, широко используя векторное исчисление и метод подвижного репера.

Щ $\frac{4306020400-522}{103(03)-82}$ 237—82

ББК 22. 151
517. 4

© Издательство «Просвещение», 1982 г.

Предисловие

До недавнего времени школьники, да и не только они, были убеждены в существовании двух математик — элементарной и высшей. Элементарная изучалась в школе и заканчивалась логарифмами, биномом Ньютона и задачами на применение тригонометрии в стереометрии. Она приносила немало неприятностей старшеклассникам, многие из которых выходили из стен школы с убеждением, что это не для них. И отдельно существовала высшая математика, о которой школьник в лучшем случае знал, что она изучается в вузах, что там есть векторы, дифференциалы и интеграл.

В соответствии с таким делением определялось и содержание популярной литературы для школьников. И из нее нередко можно было вынести мнение о математике, как о собрании головоломных задач, для решения которых необходимо обладать совершенно особыми способностями.

В действительности же дело обстоит далеко не так. И хотя для овладения математикой, как и любой другой наукой, крайне желательно наличие определенных способностей и даже таланта, главное все же — напряженный труд, без которого никакое вдохновение не придет и никаких гениальных догадок не возникнет.

Способен ли старшеклассник к такому труду в сфере математики? Наверное, ответить на этот вопрос может только он сам, испытав себя в работе над каким-либо ее разделом.

Современная школьная программа позволяет избавиться от ненужного деления нашей науки на «младшую» и «старшую». Она знакомит семиклассника с векторами, девятиклассника — с производной, десятиклассника — с интегралом. Это дает возможность любому школьнику еще в школе познакомиться с тем, чем занимается математическая наука. Конечно, это можно сделать по вузовским учебникам, но гораздо разумнее обратиться к книгам, не связанным с учебной программой вуза и более доступным для самостоятельного изучения. К сожалению, в настоящее время таких книг немного.

Естественно, знакомиться полезно с такими разделами науки, в которых используются понятия, уже знакомые из школьного курса математики, но не получившие в нем достаточного развития. Прекрасную возможность для самостоятельной творческой работы представляет дифференциальная геометрия — раздел математики, возникший как естественное обобщение и развитие одной из задач, рассматриваемых еще в школе, — задачи о проведении касательной. Именно при решении этой геометрической задачи возникли понятия дифференциала и дифференциального исчисления, а применение этого исчисления к исследованию линий и поверхностей и составляло в течение XVIII и XIX вв. содержание дифференциальной геометрии. Эту часть дифференциальной геометрии стали теперь называть *классической* или *локальной*, так как в XX в. дифференциальной геометрией называют более общую математическую дисциплину, базирующуюся на понятии дифференцируемого многообразия.

Разумеется, на той базе, которой располагает учащийся средней школы, можно рассказать только о классической дифференциальной геометрии. Однако и по этому разделу математики почти нет популярной литературы, если не считать четвертой главы книги Д. Гильберта и С. Кон-Фоссена «Наглядная геометрия». Эта книга неоднократно издавалась на русском языке, она не предполагает знакомства читателя с дифференциальным исчислением.

В предлагаемой вниманию читателя книге излагаются основные результаты классической дифференциальной геометрии, полученные в XVII—XIX вв., но изложение отличается от классического тем, что широко используются *векторное исчисление* и *метод подвижного репера*.

Эти методы характерны для начала XX в. и сыграли большую роль в дальнейшем развитии классической дифференциальной геометрии, а также в расширении содержания этой науки.

Современному школьнику хорошо известны понятия вектора и функции. Поэтому он сможет усвоить и понятие *вектор-функции скалярных аргументов*. Значениями такой функции являются векторы, а своеобразным графиком — пространственные кривые и поверхности. Для изучения этих геометрических образов и применяется подвижной репер. Так называется система координат, начало которой находится в точке M кривой (или поверхности) и определяется ее радиус-вектором OM (O — начало неподвижной системы координат), а базисные векторы также зависят от положения точки, т. е. при движении по кривой (или поверхности) репер тоже движется. Репер можно так связать с кривой или поверхностью, что его деривационные формулы (в них первые производные векторов репера линейно выражаются через базис) становятся простыми, а изучение самих кривых и поверхностей — наглядным. Коэффициенты этих формул становятся *инвариантами*, т. е. величинами, характеризующими линию или поверхность независимо от того, каким образом последние задаются. Изучение этих инвариантов — кривизны и кручения линии, полной и средней кривизны поверхностей, — было главной задачей классической дифференциальной геометрии. Составленные из инвариантов уравнения (их называют *натуральными*) дают возможность подойти к систематическому изучению и классификации конкретных линий и поверхностей (винтовые линии, линии откоса, трактриса, торс, геликоид, псевдосфера и др.). Этим вопросам и посвящены первые десять глав книги.

В главе XI рассмотрена так называемая внутренняя геометрия поверхности, послужившая основой для создания римановой геометрии и ее обобщений. А в двенадцатой читатель узнает, как дифференциальная геометрия применяется в практических дисциплинах — картографии и геодезии.

Авторы стремились к такому изложению, которое было бы доступно учащимся IX и X классов, стараясь в то же время сохранить определенный минимум математической строгости. Следует, однако, сказать, что книга не

является легким чтением. Изложение в ней становится постепенно все более трудным, так как требуется сознательное применение того, что было описано ранее. Впрочем, таково построение любой серьезной математической книги.

Книга рассчитана прежде всего на учащихся старших классов, причем она обращена не столько к уже увлеченным математикой читателям, сколько к тем, кто хотел бы узнать, в чем ее прелесть и что составляет ее содержание.

Мы полагаем, что книга будет интересна и другим категориям читателей. Хотя книга предполагает самостоятельное изучение, она может, по мнению авторов, служить основой для работы математического кружка или школьного факультатива.

Глава первая.

ОТ ЕВКЛИДА ДО ЛЕЙБНИЦА, ОТ КАСАТЕЛЬНОЙ ДО ДИФФЕРЕНЦИАЛОВ

Дифференциалы помогают геометрии». Видимо, собираясь рассказать о такой помощи, авторы рассчитывают на читателя, достаточно хорошо знающего и что такое дифференциал, и что такое геометрия. Но, будучи педагогами, авторы помнят старое мудрое правило: «Считай обучаемых людьми умными, но многое, если не все, забывшими». Именно так мы хотим отнестись и к нашим читателям. Если вы ничего не забыли, не обижайтесь, а если действительно кое-что забыли, настраивайтесь на серьезную работу.

Итак, нам предстоит объяснить, чем занималась геометрия до того, как ей понадобились дифференциалы, и почему ей понадобилась эта помощь.

Знаменитый греческий историк Геродот (484—425 гг. до н. э.), ссылаясь на египетских жрецов, писал так: «Царь разделил землю между всеми египтянами, дав каждому по равному прямоугольному участку; из этого он создал себе доходы, приказав ежегодно вносить налог. Если же от какого-нибудь надела река отнимала что-нибудь, то владелец, приходя к царю, сообщал о происшедшем. Царь же посылал людей, которые должны были осмотреть участок земли и измерить, насколько он стал меньше, чтобы владелец вносил с оставшейся части налог, пропорциональный установленному. Мне кажется, что так и была изобретена геометрия, которая затем из Египта была перенесена в Элладу».

Конечно, читатель прекрасно понимает, что Геродот основательно упрощает причины возникновения геометрии, но мы хотим пока отметить три момента. Во-первых,

из объяснения Геродота становится вполне понятным смысл самого слова «геометрия» — землемерие (от греческих $\gamma\eta$ — земля, $\mu\epsilon\tau\rho\acute{\epsilon}\omega$ — мерю), т. е. геометрия с момента зарождения была связана с практическими нуждами людей. Во-вторых, для вычисления изменений в налоге надо было составить и решить пропорцию, т. е. геометрия всегда была связана с другими разделами математики, поначалу — с арифметикой. И наконец, в-третьих, первые геометрические знания «были перенесены в Элладу», где усилиями многих поколений ученых были систематизированы, развиты и получили прекрасное оформление в «Началах» гениального Евклида (ок. 300 г. до н. э.). Символично, что «Начала» были написаны в Александрии, городе, находящемся на территории Египта, где, если верить Геродоту, и родилась геометрия.

В течение двух с лишним тысячелетий «Начала» считались образцовым сочинением и добрая сотня поколений знакомились с геометрией именно по Евклиду. Это произведение содержит большую часть материала, излагаемого и сегодня в школьном курсе геометрии, а также много других интересных и важных фактов геометрии, теории отношений, теории чисел и т. п.

Однако у Евклида изложена лишь та часть геометрии, которая более или менее хорошо получается без применения алгебры, без тригонометрии, без теории пределов. И пока люди не включили в геометрию алгебраическую символику и уравнения, тригонометрические функции и предельный переход, ничего по-настоящему более глубокого, чем то, что есть в «Началах», им в геометрии создать не удавалось.

Быстрее всего античным математикам удалось продвинуться в создании тригонометрических методов. Александрийский математик и астроном Клавдий Птолемей уже в середине II в. н. э. написал «Великое математическое построение астрономии в XIII книгах», более известное под названием «Альмагест». В книге Птолемея были впервые изложены основные факты и методы сферической и прямолинейной тригонометрии. Они были нужны мореплавателям, путешественникам, астрономам, астрологам (была и такая «наука»), они были нужны обществу. А как только обществу по-настоящему понадобится развитие какого-либо научного метода, так он — более или менее скоро — начинает развиваться...

Для алгебры и анализа время пришло значительно позднее. Очень медленно — полторы тысячи лет — создавалась математическая символика. Первые шаги в этом направлении сделал александрийский математик Диофант, придумавший обозначения для неизвестных и их степеней и знаки вычитания и равенства. Гениальной и, как все гениальное, простой оказалась догадка французского ученого Франсуа Виета (1540—1603), начавшего обозначать буквами не только неизвестные, но и коэффициенты при них. По-настоящему же символика элементарной алгебры стала использоваться еще позднее — в книге Рене Декарта «Геометрия», которая вышла в свет в 1637 г.

Но прежде чем говорить о заслугах Декарта, мы обратимся к тем задачам, которые стояли перед его непосредственными предшественниками и современниками и более или менее отчетливо понимались ими, как главные задачи науки того времени. Вообще, конечно, задач было очень много, но можно считать, что наиболее существенными оказались три.

Первая задача — чисто алгебраическая — заключалась в требовании открыть формулы для вычисления корней алгебраического уравнения произвольной степени.

Вторая задача была поставлена еще до нашей эры (конечно, не в той формулировке, которую мы сейчас предложим): пусть фигура Φ ограничена некоторыми кривыми; требуется найти ее площадь. Сначала задача была поставлена значительно конкретнее: с помощью циркуля и линейки требуется построить квадрат, площадь которого равна площади круга данного диаметра (задача о квадратуре круга). Античные математики, вообще говоря, понимали, что решение этой частной задачи требует создания новых общих методов. Первые шаги в этом направлении были сделаны еще до Евклида выдающимся математиком Евдоксом Книдским (ок. 406 — ок. 355 гг. до н. э.). Наиболее серьезных результатов удалось добиться через полтора века гениальному Архимеду (287—212 гг. до н. э.), сумевшему найти квадратуру параболы и ряда других фигур. Методы Евдокса — Архимеда были успешно развиты европейскими математиками XVI—XVIII вв., и задача о квадратурах в конечном итоге привела к идее определенного интеграла. Развитие этого направления в математике было обеспечено и ее внутренними потребно-

стями, и прежде всего нуждами развивавшихся физики, механики, техники.

С третьей задачей — а она-то нас и будет интересовать более всего — дело обстояло сложнее. Она состоит в отыскании способов проведения касательной к кривой в произвольной ее точке. Эта задача была по-настоящему поставлена и решена только в XVII в.

Успехи науки в XVII в. вообще необычайно велики. Более того, можно сказать, что ни одна предшествующая эпоха не дала ничего подобного. Не говоря уж о многочисленных более или менее значительных частных приобретениях науки, в естествознании были созданы четыре фундаментальные научные теории, оказавшие решающее влияние на дальнейшее развитие науки, — физическая оптика, классическая механика, теория тяготения и исчисление бесконечно малых (дифференциальное и интегральное исчисление). И может быть, еще важнее этих открытий было уничтожение резкого различия, которое до той поры существовало между математикой и естественными науками. Именно в XVII в. стала понятной общенаучная роль математики.

И конечно, успехи эти объясняются не одной лишь гениальностью ученых того времени, но прежде всего подъемом общественного производства, ростом материальной культуры, развитием передового для той эпохи капиталистического уклада хозяйства. Стремительный рост числа ученых, создание академий и других научных учреждений, открытие обсерваторий и музеев объясняются именно этим, а не благими пожеланиями королей, кардиналов и министров. Наука стала обязательной принадлежностью цивилизованного государства.

Но вернемся к задаче о касательной. Для крупнейших математиков XVII в. вопрос о методах ее решения служил источником ожесточенных споров. Эти споры велись в основном в переписке, так как настоящих научных журналов тогда еще не существовало. Большая часть корреспонденции шла через постоянно жившего в Париже Марена Мерсенна (1588—1648), который сохранил для потомства переписку своих друзей, ему же часто приходилось мирить не в меру раздраженных спорщиков, живших в разных городах и странах. К задаче о касательной почти одновременно обратились Рене Декарт (1596—1650), Пьер Ферма (1601—1655) и Жиль Персонье (1602—1675), более

известный под именем Роберваля.

Наибольшей славы добился Декарт, опубликовавший (а тогда это было очень и очень не просто) свои основные труды — «Рассуждение о методе» (частью этого труда и является знаменитая «Геометрия»), «Начала философии» и др. Сочинения же Роберваля и Ферма были опубликованы лишь посмертно. Тем не менее все они, а также их более молодой современник Блез Паскаль (1623—1662) внесли существенный вклад в решение задачи о касательной, которая, по существу, является переводом на геометрический язык важнейшей задачи механики — задачи о скорости движения точки и первой задачи дифференциального исчисления — задачи о скорости изменения функции, т. е. о производной.



Р. Декарт.

Декарту не удалось создать учение о производных, но он с присущей ему гениальностью прекрасно представлял, как далеко можно пойти, решая эту задачу. С Декарта и началась помощь дифференциалов геометрии, хотя никаких дифференциалов у самого Декарта пока нет, у него есть лишь то, с чего они начались, у него есть то, что позволило Ф. Энгельсу много лет спустя сказать: «Поворотным пунктом в математике была Декартова переменная величина. Благодаря этому в математику вошли *движение* и тем самым диалектика и благодаря этому же стало *немедленно необходимым дифференциальное и интегральное исчисление*, которое тотчас и возникает и которое было в общем и целом завершено, а не изобретено, Ньютоном и Лейбницем»¹.

«Геометрию» Декарта от трудов его многочисленных предшественников существенно отличает, как уже сказано выше, достаточно свободное применение алгебраической символики. Она у Декарта почти не отличается от современной, — во всяком случае, именно он приучил нас обозначать переменные (неизвестные) последними буква-

¹ Маркс К., Энгельс Ф. Соч., т. 20, с. 573.

ми латинского алфавита, а коэффициенты при них — первыми. Следующее новшество Декарта — введение координат.

Строго говоря, в «Геометрии» нет ни слова «координаты», ни упоминания об абсциссе и ординате, более того, в чертежах к «Геометрии» нет привычных нам перпендикулярных осей. Но есть главное: «Все точки линий, которые можно назвать геометрическими, т. е. которые подходят под какую-либо точную и определенную меру, обязательно находятся в некотором отношении ко всем точкам прямой линии, которое может быть выражено некоторым уравнением, одним и тем же для всех точек данной линии». Поясним двумя известными читателю примерами эту несколько тяжело (для нашего времени!) изложенную мысль. На плоскости дана прямая. Ее уравнение есть $y = ax + b$. Это уравнение показывает (рис. 1), как координаты «всех точек прямой линии» (оси абсцисс) связаны с координатами всех точек «данной линии» (в нашем примере — прямой). Или пусть дана парабола $y = ax^2$. Это уравнение тоже показывает (рис. 2), как связаны координаты точек оси абсцисс с координатами параболы.

Иными словами, Декарт ясно сформулировал тот способ задания плоской кривой при помощи уравнения, связывающего координаты переменной точки, которым мы пользуемся и до сих пор, записывая: $y = f(x)$. Еще не владея идеей дифференциального исчисления, Декарт многократно пытался найти общий способ построения касательной. Об этом он писал и в «Геометрии», и в письмах Мерсенну, Робервалю, Ферма и др. Однако рассуждения Декарта о касательных были не очень отчетливыми. Гораздо яснее решение задачи изложил Ферма. Летом 1638 г.

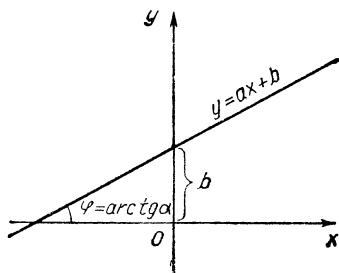


Рис. 1

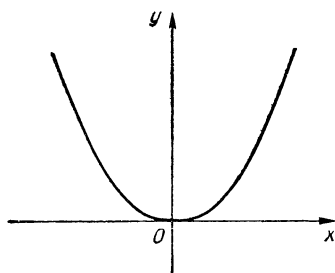


Рис. 2

он писал Декарту: «Общий метод нахождения касательных к кривым заслуживает того, чтобы объяснить его более ясно, чем это было сделано до сих пор. Пусть дана кривая...» — с этого места мы будем излагать идеи Ферма на языке, более близком современному школьнику.

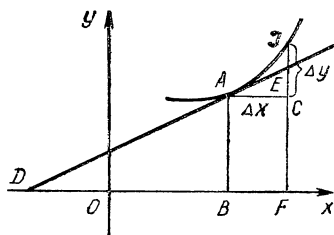


Рис. 3

Итак, пусть дана кривая $y = f(x)$ и принадлежащая ей точка A с координатами x и y . Необходимо найти $t = |DB|$ — проекцию отрезка касательной $[AD]$ (искомый отрезок DB называется подкасательной). Возьмем на касательной произвольную точку E (рис. 3) с абсциссой $x + \Delta x = |OF|$. Из подобия треугольников DAB и DEF получаем:

$$\frac{|EF|}{y} = \frac{t + \Delta x}{t}.$$

В этом (одном!) уравнении два неизвестных — подкасательная t и ордината EF точки E . Ферма делает никак не обоснованный шаг, который потом приведет его к успеху, — он заменяет ординату точки E на ординату точки I , т. е. на $|IF| = y + \Delta y$ («Хотя линия FE не равна ординате, проведенной к кривой из точки F , я тем не менее принимаю ее как бы равной на самом деле ординате»). Теперь имеем:

$$\frac{y + \Delta y}{y} = \frac{t + \Delta x}{t}.$$

Если проделать несложные преобразования, то получим:

$$yt + t \cdot \Delta y = yt + y \cdot \Delta x, \quad t = y \cdot \frac{\Delta x}{\Delta y} = y : \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Затем Ферма вычисляет приращение Δy «в соответствии со специфическим свойством кривой», т. е. в соответствии с ее уравнением. Например, для кривой $y = x^2$ получится $y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$.



П. Ферма

Более того, еще раньше Ферма торжествующе писал: «И более общий метод привести невозможно».

Все это, конечно, знаменательно хотя бы потому, что получились правильные результаты. Но слишком уж много непонятного. Присмотритесь к фигуре ACI (что-то вроде прямоугольного треугольника, катеты которого суть разности абсцисс и ординат двух точек кривой, а гипотенуза заменена дугой кривой) и к треугольнику ACE . Почему, хотя Ферма без достаточного основания заменил катет EC катетом IC , а потом «отбросил все, что остается в соединении с Δx », что тоже совершенно не обосновано, все же получился «общий метод»? Может быть, ему просто повезло, а при построении касательной к какой-нибудь особенной кривой ничего бы не получилось? Конечно, треугольник ACI требует очень внимательного рассмотрения.



Г. В. Лейбниц

Вычтя из обеих частей этого равенства левую и правую части уравнения кривой, получим: $\Delta y = 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$. Значит, $t = y : (2x + \Delta x)$. А теперь «я отбрасываю все, что остается в соединении с Δx , т. е. пишу $t = \frac{y}{2x}$ ». Значит, для любой точ-

ки кривой можно вычислить длину подкасательной и, следовательно, построить касательную. Задача решена полностью, причем Ферма неоднократно подчеркивает, что его метод годится для любых кривых.

Через сорок лет, рассматривая аналогичный чертеж в работе Блеза Паскаля (1623—1662) «О синусах четверти круга», великий немецкий ученый Г. В. Лейбниц почувствовал, что он «озарен лучом нового света». Вот тогда то и было не только

впервые отчетливо сказано о том, что такое дифференциал и что такое дифференциальное исчисление, но и были введены сами эти термины.

О Лейбнице как об одном из крупнейших философов, как о математике, механике, физике, как о человеке, внесшем существенный вклад в логику, юриспруденцию, геологию, лингвистику и другие науки, как о публицисте и дипломате написано очень много, и мы не будем подробно пересказывать его биографию. Об эпохе, в которой жил и творил этот человек, тоже написано немало, и мы не сомневаемся, что читатель знаком с событиями, происходившими в мире во второй половине XVII в. Но нам представляется любопытным сопоставить хронологическую канву жизни Лейбница с хронологией основных событий политической, научной и культурной жизни. Вот что получается:

3 июля 1646 г. в семье профессора морали Лейпцигского университета Фридриха Лейбница родился третий ребенок — Готфрид Вильгельм.

Вестфальским миром закончилась в 1648 г. Тридцатилетняя война, в которой участвовали почти все государства Европы. Население Германии за годы войны уменьшилось с 16 до 6 миллионов человек. Война еще более усилила, а мир официально закрепил феодальную раздробленность Германии.

20 июня 1648 г. началась экспедиция Семена Дежнева (1605—1673), открывшая пролив между Азией и Америкой и морской путь вокруг Северо-Восточной Азии. Этой экспедицией фактически закончилась эпоха великих географических открытий, начавшаяся в 1492 г. путешествием Христофора Колумба.

В 1653 г. Лейбниц поступил в школу, увлекся историей, читал Цицерона, Геродота, Платона, произведения «отцов церкви».

В 1657—1659 гг. Лейбниц учился во втором (двухгодичном) классе. Увлекался риторикой и даже начал (небезуспешно!) писать стихи. В 1659—1661 гг. учился в первом (тоже двухгодичном) классе. Был потрясен аристотелевой логикой, пришел к убеждению, что именно логика должна охватить всю область человеческого мышления.

В 1661 г. Лейбниц поступил в Лейпцигский университет.

В 1662 г. Лейбниц получил степень бакалавра философии.

В 1649 г. казнен английский король Карл I. Это было одним из важных событий буржуазной революции в Англии.

В 1650 г. умер Рене Декарт.

В 1654 г. Переяславская рада приняла решение о воссоединении Украины с Россией.

В 1665 г. в Англии вышла книга Джона Валлиса (одного из предшественников И. Ньютона) «Арифметика бесконечного».

В 1657 г. Х. Гюйгенс (1629—1695) опубликовал первую книгу по теории вероятностей «О расчетах при азартных играх» и построил первые часы с маятником.

Опубликован трактат Б. Паскаля «О синусах четверти круга» (1659 г.).

В 1661 г. в Тринити — колледж Кембриджского университета поступил Исаак Ньютон (1642—1727). Во Франции началось правление Людовика XIV.

В 1662 г. было создано Лондонское королевское общество. Один из его членов Роберт Бойль опубликовал работу «Защита доктрины, относящейся к упругости и весу воздуха», в которой был сформулирован за-

В 1663 г. Лейбниц, чтобы лучше познать математику, перешел на один семестр в Иенский университет, а в 1664 г. получил степень магистра.

В 1666 г. Лейбниц защитил докторскую диссертацию по юриспруденции.

В 1668—1672 гг. Лейбниц служил у майницского курфюрста.

В 1672 г. Лейбниц в Париже познакомился с Гюйгенсом.

В 1673 г. Лейбниц ознакомился с трактатом Паскаля «О синусах четверти круга».

В 1675 г. Лейбниц сделал главные открытия в дифференциальном и ин-

тегральном исчислении, названный впоследствии законом Бойля — Мариотта. Умер Б. Паскаль.

В 1665 г. Ньютон получил степень бакалавра. В Париже началось издание «Journal de Sçavans» — первого в истории периодического органа, предназначенного специально для научных публикаций. Умер П. Ферма.

В 1666 г. создана Парижская академия наук.

В 1669 г. Рембрандт закончил работу над картиной «Возвращение блудного сына».

В 1671 г. в Париже была открыта обсерватория и Ж. Пикар закончил вычисление длины одного градуса дуги земного меридиана. В Москве казнили Степана Разина.

В 1673 г. английское королевское общество начало публикацию писем А. Левенгука, впервые наблюдавшего мир микроскопических организмов.

В 1674 г. Клод Перро закончил строительство восточного фасада Лувра, образца французского классицизма.

В 1675 г. датский астроном О. Ремер вычислил скорость света. Открыта

тегральном исчислении. В 1676—1716 гг. служил у герцога Ганноверского. В 1676 г. встречался с английскими и голландскими учеными, в частности с Б. Спинозой.

В 1684 г. Лейбниц опубликовал первую статью по математическому анализу: «Новый метод максимумов и минимумов, а также касательных, для которого не служат препятствием ни дробные, ни иррациональные величины, и особый для этого род исчисления».

В конце 80-х гг. Лейбниц много путешествует (Вена, Италия).

В 1697 г. Лейбниц впервые встречается с Петром I.

В 1700 г. по инициативе Лейбница в Берлине открылось научное общество — будущая Академия наук

Гринвичская обсерватория. Умер Роберваль.

В 1679 г. умер английский философ-материалист Томас Гоббс (род. в 1588 г.).

В 1682 г. русским царем стал Петр I.

В 1683 г. польский король Ян Собеский разгромил под Веной турецкую армию. Эта победа остановила турецкую агрессию в Европе.

В 1686 г. опубликована книга Ньютона «Математические начала натуральной философии».

В Москве в 1687 г. основана Славяно-греко-латинская академия.

В 1696 г. вышла книга Г. Ф. де Лопиталья «Анализ бесконечно малых для изучения кривых линий».

Шарль Перро в 1697 г. издал «Сказки моей матери гусыни» («Красная шапочка», «Золушка», «Кот в сапогах» и др.).

Началась Северная война (1700—1721) России против Швеции за выход к Балтийскому морю. В 1703 г. основан Петербург. В 1709 г. шведы разбиты под Полтавой.

В 1707 г. Д. Папен опубликовал «Новое искусство эффективно поднимать воду на высоту при помощи огня» — описание первого парового двигателя.

В 1711—1712 гг. Лейбниц дважды встречался с Петром I, который назначил его тайным советником юстиции русской службы.

В 1716 г. произошла последняя встреча с Петром I.

14 декабря 1716 г. Лейбниц скончался.

15 апреля 1707 г. родился Леонард Эйлер.

Из огромного творческого наследия Лейбница основное значение для нас имеет то, что сделано им в дифференциальном и интегральном исчислении. Математическое творчество Лейбница было тесно связано с его общенаучными взглядами и убеждениями. Еще в университете он начал думать над идеей «всеобщей характеристики» или «универсальной письменности». Иначе говоря, он хотел найти способ, с помощью которого можно было бы изображать логические операции и охватить все человеческое познание. Изучая любые разделы любой науки, в том числе и математики, Лейбниц стремился всюду изыскивать наиболее общие элементы, изобретал средства для их символического выражения и единые точно установленные правила (т. е. алгоритмы, — кстати, это слово ввел в математику именно Лейбниц), по которым можно находить (вычислять) связи между этими элементами.

Перейдем теперь к рассмотрению треугольника Ферма и Паскаля глазами Лейбница (хотя и через современные «очки»).

Для его построения нам понадобится кривая линия AB , «такая, чтобы отношение ординаты к абсциссе выражалось каким-либо уравнением» (это слова из упомянутой выше книги Лопиталя). Мы скажем проще: пусть кривая AB задана уравнением $y = f(x)$, причем точка A имеет

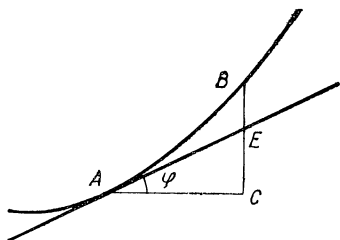


Рис. 4

стрым углом φ между катетом AC и касательной AE , проведенной к кривой в точке A .

Одновременно с треугольником ACB образовался и треугольник ACE . Его катеты AC и CE Лейбниц называл *дифференциалами* (от латинского *differentia* — разность) и обозначил dx и dy . Треугольник ACE имеет с треугольником ACB общий угол φ и совпадающий катет $dx = \Delta x$. Сложнее дело обстоит со вторым катетом, но вот тут-то как раз и виден луч света!

Дифференциал ординаты dy пропорционален дифференциалу абсциссы dx : $dy = kdx$, при этом коэффициент пропорциональности $k = \operatorname{tg} \varphi$. Это легко увидеть прямо на чертеже. Чуть труднее увидеть другое. Приращение ординаты Δy связано с дифференциалом абсциссы dx очень простым равенством $\Delta y = kdx + |BE|$. Это равенство напоминает известное из курса алгебры VI класса выражение линейной функции $y = ax + b$. Лейбниц заметил, что при стремлении Δx к нулю пределом отношения $\frac{|BE|}{\Delta x}$

будет нуль! (только так он не говорил, так сказали через полтора года.) Поэтому-то у Ферма и получилось все хорошо, когда он «отбрасывал все, что оставалось в соединении с Δx », т. е. когда он заменял приращение ординаты ее дифференциалом. На языке Лейбница у него было: $dy = 2x \cdot dx$.

Заметим, что все эти рассуждения годятся, по-видимому, для любой функции (кстати, термин «функция» впервые был употреблен тоже Лейбницем, сделал он это в 1694 г.).

Что же из всего этого следует? Если нам известны dx и коэффициент $k = \operatorname{tg} \varphi$, то мы легко — простым умножением — можем вычислить дифференциал функции, так

координаты x и y (рис. 4). Дадим абсциссе x приращение $|AC| = \Delta x$. Тогда ордината y получит приращение $|CB| = \Delta y$. Образовался криволинейный треугольник ACB с прямолинейными катетами Δx и Δy , криволинейной гипотенузой Δs , где s — длина дуги кривой, и ост-

как

$$dy = kdx. \quad (1.1)$$

В современном школьном курсе алгебры и начал анализа идут по такому пути. Сначала изучают понятие предела, затем переходят к приращению аргумента и функции и их отношению, предел этого отношения при $\Delta x \rightarrow 0$ называют производной и обозначают y' . Но до дифференциалов в школьной математике дело не доходит. Исторически же возникновение понятия дифференциала предшествовало появлению понятия производной. Для нашей книжки понятие дифференциала является весьма важным, именно поэтому мы так подробно говорили о его появлении в трудах ученых XVII в. Важным и полезным оно оказалось и для геометров — продолжателей дела Лейбница, увидевших возможность использования дифференциалов в тех областях учения о пространстве, куда раньше вообще не удавалось проникнуть с помощью обычных средств.

Уже сам Лейбниц писал: «Наш метод обладает поразительной и прямо беспримерной легкостью. Но это лишь начало некоей много более высокой Геометрии, которая распространяется на труднейшие и прекраснейшие задачи прикладной Математики, и едва ли кому-либо удастся заняться с той же легкостью такими вещами, не пользуясь нашим дифференциальным исчислением или ему подобным». Здесь прекрасно сформулированы и мысль о силе нового метода применительно к геометрии, и мысль о предстоящем создании новых разделов геометрии, применимых к прикладной математике, и даже осторожная мысль о возможности создания какого-то исчисления, подобного дифференциальному для «более высокой Геометрии».

Однако от первой формулировки любой идеи до первых существенных шагов в ее реализации всегда проходит немало времени. А для того чтобы абстрактная наука сделала такие шаги, нужны по меньшей мере два обстоятельства — побудительный мотив со стороны практики и гениальный ум, порою даже несколько таких умов, принимающих эстафету мысли друг от друга.

На первых порах единственным стимулом со стороны практики была геометрия, затем к ней присоединилась механика и много позднее — физика и техника. Сама же

геометрия почти все время имела мощные стимулы со стороны геодезии и картографии, наук об измерениях на земной поверхности и об изображении этой кривой поверхности на плоскости, т. е. на карте. Требования к этим наукам особенно усилились, начиная с эпохи великих географических открытий и в связи с развитием торговли и мореплавания. О первых шагах этих наук мы поговорим в одиннадцатой главе.

Что касается гениальных умов, то они появлялись не очень часто и не всегда геометрия была их единственным или хотя бы основным занятием.

Лейбниц и Ньютон — гении XVII в. XVIII век математики называют веком Леонарда Эйлера (1707—1783). Без преувеличения можно сказать, что в математике и механике нет ни одного раздела, который разрабатывался бы тогда (да и много лет спустя) без его основополагающего влияния. До сих пор многие разделы математики и механики связаны с упоминанием имени Эйлера: теорема Эйлера о многогранниках, условия Эйлера в математическом анализе, формула Эйлера в дифференциальной геометрии, функция Эйлера в теории чисел, уравнения Эйлера в гидромеханике и т. д. В дифференциальной геометрии прямым продолжателем Эйлера был знаменитый французский ученый и революционер Гаспар Монж (1746—1818), автор первой книги, специально посвященной дифференциальной геометрии. Мы еще вернемся к Эйлеру и Монжу, а сейчас только отметим, что и они, и их многочисленные ученики и последователи пользовались лишь весьма несовершенной теорией дифференциалов.

Фундамент современной дифференциальной геометрии заложил Карл Фридрих Гаусс (1777—1855), пользовавшийся, хотя и в неявной форме, исчислением, «подобным дифференциальному», о котором еще Лейбниц писал: «Я думаю, мы нуждаемся еще в одном исчислении, собственно геометрическом или линейном». Идеи Гаусса развивались многими математиками того времени и продолжают развиваться до нашего времени. Однако еще в середине XIX в., опираясь на теорию квадратичных форм Гаусса, другой немецкий ученый — Бернхард Риман (1826—1866) — высказал идеи, которые легли в основу дифференциальной геометрии XX в.

Таким образом, если мы хотим узнать что-нибудь о

том, как дифференциалы стали помогать геометрии, нам следует идти по длинной цепочке имен, методов и идей от Лейбница к Эйлеру и Монжу, затем к Гауссу, Риману и их последователям. И наверное, читателю ясно, что путь этот утомителен и долог. Нет ли в нашем распоряжении пути более короткого?

Есть, конечно, но для движения по нему потребуется некоторая дополнительная подготовка. Во-первых, понадобится то самое «геометрическое или линейное исчисление», о котором мечтал Лейбниц и которым неявно пользовался Гаусс. Это исчисление называется теперь *векторным*. Его основы были созданы еще в первой половине XIX в. немецким математиком Германом Грасманом (1809—1877) и английским математиком Уильямом Гамильтоном (1805—1865). Их идеи были развиты в конце XIX в. известными физиками — англичанином Джеймсом Максвеллом (1831—1879), американцем Джозайя Гиббсом (1839—1903) и др.

Во-вторых, мы, конечно, не будем следовать лейбницевскому изложению теории дифференциалов. Почти двести лет понадобилось, чтобы эта теория приобрела тот вид, в каком она сегодня изучается в средней школе. На современное школьное изложение элементов дифференциального исчисления мы и будем опираться в дальнейшем, дополняя иногда этот материал новыми сведениями.

Изложению основ векторного исчисления и теории дифференциалов и будут посвящены две следующие главы. Если читателю они покажутся сложными или скучными — не беда. Можно их пропустить и продолжить чтение со следующих глав, возвращаясь назад, когда что-то в них окажется непонятным. Впрочем, стоит напомнить, что легких книг по математике (даже популярных) не бывает и без труда математическими знаниями не овладешь. Тем большее удовольствие читатель получит, разобравшись в том, что поначалу казалось непонятным.

ОТ ВЕКТОРА—К ВЕКТОРУ-ФУНКЦИИ

Наш читатель, конечно, уже немало знает о векторах и их применении в геометрии и тригонометрии. Всех этих знаний для чтения этой книги, пожалуй, даже и не потребуется, но есть несколько понятий и результатов, без которых никак не обойтись. Некоторые из них окажутся для читателя новыми, о других он уже имеет представление. Но мы коротко расскажем обо всех, полагая только, что читателю известны понятия вектора, его модуля (сейчас наряду с этим термином часто употребляют термин «норма») и их обозначения. Читая эту главу, не обязательно сразу полностью усваивать материал, полезнее возвращаться к отдельным вопросам, по мере того как они понадобятся при дальнейшем чтении книги. Именно с этой целью глава разделена на небольшие параграфы.

§ 1. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

Лейбниц, стремясь всюду к общности, к единым методам, к алгоритмизации вычислений и преобразований, создал для решения систем линейных уравнений целый раздел алгебры, называемый теорией определителей. Позднее оказалось, что определители нужны в самых различных областях математики. Простейшие факты теории определителей помогут и нам.

Рассмотрим квадратные таблички из четырех или девяти чисел, расположенных так:

$$\begin{array}{ccc} & x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & - & \\ y_1 & y_2 & z_1 & z_2 & z_3 \end{array}$$

Определителем второго порядка называется число Δ_2 , вычисляемое из четырех чисел по такому правилу:

$$\Delta_2 = x_1 y_2 - x_2 y_1. \quad (2.1)$$

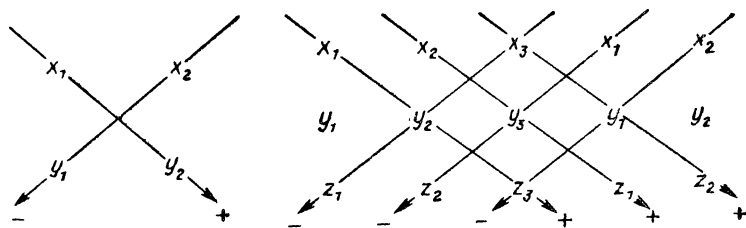
Определителем третьего порядка называется число Δ_3 , вычисляемое из девяти чисел по такому правилу:

$$\Delta_3 = x_1 y_2 z_3 + x_2 y_3 z_1 + x_3 y_1 z_2 - x_3 y_2 z_1 - x_1 y_3 z_2 - x_2 y_1 z_3. \quad (2.2)$$

Для того чтобы отличать саму табличку (иначе ее называют матрицей) от числа, ей соответствующего, договорились о таком обозначении:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Правила вычисления определителей второго и третьего порядка очень просты. Для облегчения их запоминания придуманы две схемы:



Стрелки на схемах показывают, какие множители следует брать, причем, если стрелка идет слева — вниз — направо, то произведение надо писать со знаком «+», а если справа — вниз — налево, то со знаком «-». В схеме для определителя третьего порядка пришлось повторить справа первый и второй столбцы.

Приведем примеры вычисления определителей:

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 4 \cdot 5 - (-1) \cdot 3 = 23;$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 7 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & -5 & -1 \end{vmatrix} = (-2) \cdot 3 \cdot (-1) + 7 \cdot 2 \cdot 4 + \\ + 0 \cdot 1 \cdot (-5) - 0 \cdot 3 \cdot 4 - \\ - (-2) \cdot 2 \cdot (-5) - 7 \cdot 1 \cdot (-1) = 49.$$

При вычислении определителей, особенно заданных в буквенном виде, оказываются полезными следующие простые предложения (читатель может проверить их справедливость непосредственным вычислением):

1. «Столбцы» и «строки» определителя можно взаимно поменять местами, например:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

2. Если элементы двух строк (или столбцов) пропорциональны, то определитель равен нулю:

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} \Rightarrow \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = 0, \quad (2.3)$$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} \Rightarrow \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (2.4)$$

3. Определитель третьего порядка можно выразить через определители второго порядка следующим образом:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = x_1 \begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} + x_2 \begin{vmatrix} y_3 & y_1 \\ z_3 & z_1 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix}. \quad (2.5)$$

4. Перестановка двух строк (столбцов) определителя вызывает изменение его знака, например:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix}.$$

Этими свойствами определителей и самими определителями мы будем в дальнейшем часто пользоваться.

§ 2. КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА

Известно, что каждый вектор можно разложить по трем попарно перпендикулярным единичным векторам $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ (рис. 5):

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}. \quad (2.6)$$

Тройка векторов \bar{i} , \bar{j} , \bar{k} называется декартовым базисом, а тройка чисел x , y , z — координатами вектора \bar{r} относительно этого базиса. В частности, векторы самого декартова базиса имеют координаты:

$$\begin{aligned} \bar{i} &(1, 0, 0), \quad \bar{j} &(0, 1, 0), \\ \bar{k} &(0, 0, 1). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Если известны координаты двух (или более) векторов, то каждую координату суммы можно найти как сумму соответствующих координат слагаемых:

$$\bar{r}_1 + \bar{r}_2 = (x_1 + x_2)\bar{i} + (y_1 + y_2)\bar{j} + (z_1 + z_2)\bar{k}, \quad (2.8)$$

а каждую координату разности двух векторов — как разность соответствующих координат этих векторов:

$$\bar{r}_1 - \bar{r}_2 = (x_1 - x_2)\bar{i} + (y_1 - y_2)\bar{j} + (z_1 - z_2)\bar{k}. \quad (2.9)$$

Необходимо, конечно, помнить и геометрический смысл суммы и разности, который для двух векторов совершенно очевиден из рисунка 6.

Координата произведения вектора на число равна произведению соответствующей координаты данного вектора на это число:

$$a\bar{r} = ax\bar{i} + ay\bar{j} + az\bar{k}. \quad (2.10)$$

§ 3. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ

Скалярным произведением двух ненулевых векторов называется произведение длин этих векторов и косинуса угла между ними:

$$\bar{r}_1 \cdot \bar{r}_2 = |\bar{r}_1| \cdot |\bar{r}_2| \cdot \cos \varphi. \quad (2.11)$$

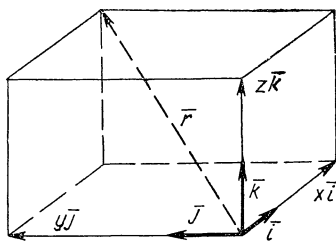


Рис. 5

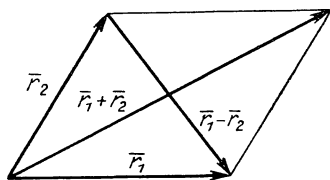


Рис. 6

Мы часто будем пользоваться очевидным следствием этого определения: скалярное произведение перпендикулярных векторов равно нулю.

Скалярное произведение обладает всеми свойствами обычного произведения. Эти свойства можно назвать свойствами «линейности», так как они сводятся к правилу умножения линейных выражений:

$$(\alpha \bar{r}_1 + \beta \bar{r}_2) \cdot \bar{r}_3 = \alpha (\bar{r}_1 \cdot \bar{r}_3) + \beta (\bar{r}_2 \cdot \bar{r}_3). \quad (2.12)$$

Заметим теперь, что для базисных векторов \bar{i} , \bar{j} , \bar{k} из определения (2.11) получается такая «таблица скалярного умножения»:

	\bar{i}	\bar{j}	\bar{k}
\bar{i}	1	0	0
\bar{j}	0	1	0
\bar{k}	0	0	1

(2.13)

Любые два вектора \bar{r}_1 и \bar{r}_2 могут быть разложены по базису \bar{i} , \bar{j} , \bar{k} :

$$\bar{r}_1 = x_1 \bar{i} + y_1 \bar{j} + z_1 \bar{k},$$

$$\bar{r}_2 = x_2 \bar{i} + y_2 \bar{j} + z_2 \bar{k}.$$

Отсюда при помощи (2.12) и (2.13) получается замечательное правило вычисления скалярного произведения по координатам его множителей:

$$\bar{r}_1 \cdot \bar{r}_2 = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2. \quad (2.14)$$

А из (2.14) и (2.11) легко получить две формулы:

$$|r| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (2.15)$$

$$\cos \varphi = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Первая позволяет вычислить модуль вектора по его координатам, а вторая — угол между двумя ненулевыми векторами.

§ 4. ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ

Теперь мы расскажем о векторах то, с чем читатель незнакомился в школе, но сначала обратим внимание на одну странную особенность скалярного произведения, отличающую его от других произведений. Произведение натуральных чисел всегда есть натуральное число. Произведение целых чисел — целое. Произведение рациональных чисел — рациональное число. Наконец, произведение действительных чисел — действительное число. Иначе говоря, результат умножения элементов некоторого множества принадлежит этому же множеству. Но операция скалярного умножения векторов этим важным свойством уже не обладает: по определению скалярного произведения любой паре векторов ставится в соответствие не вектор, а число. Нельзя ли и для векторов ввести такое умножение, результатом которого тоже был бы вектор?

Удачным оказалось следующее определение:

Векторным произведением двух непараллельных ненулевых векторов $\vec{r}_1(x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{r}_2(x_2, y_2, z_2)$ называется вектор \vec{n} , имеющий модуль, численно равный площади параллелограмма, построенного на векторах \vec{r}_1 и \vec{r}_2 как на сторонах, и направленный перпендикулярно плоскости этого параллелограмма в ту сторону от нее, откуда вращение от \vec{r}_1 к \vec{r}_2 видно против часовой стрелки (рис. 7).

Обозначается такое произведение знаком « \times » (косым крестом):

$$\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = \vec{n}.$$

Для модуля векторного произведения имеем (площадь параллелограмма!):

$$|\vec{n}| = |\vec{r}_1 \times \vec{r}_2| = |\vec{r}_1| \cdot |\vec{r}_2| \cdot \sin \varphi. \quad (2.16)$$

Из этой формулы естественно вытекает распространение понятия векторного произведения на параллельные

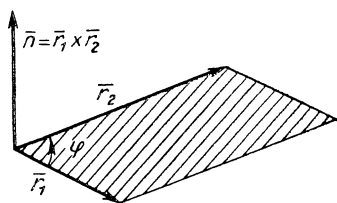


Рис. 7

и нулевые векторы: для них векторное произведение по определению равно нулю, в частности,

$$\bar{r}_1 \parallel \bar{r}_2 \Rightarrow \bar{r}_1 \times \bar{r}_2 = 0. \quad (2.17)$$

Отметим некоторые свойства векторного произведения.

1. От перестановки множителей векторное произведение меняет знак, т. е.

$$\bar{r}_1 \times \bar{r}_2 = -(\bar{r}_2 \times \bar{r}_1). \quad (2.18)$$

Объясняется это очень просто — площадь параллелограмма от перестановки сторон не изменится, но направление вектора сменится на противоположное.

2. Скалярный множитель можно выносить за знак векторного произведения:

$$\lambda \bar{r}_1 \times \bar{r}_2 = \lambda (\bar{r}_1 \times \bar{r}_2) \quad (2.19)$$

и

$$\bar{r}_1 \times \lambda \bar{r}_2 = \lambda (\bar{r}_1 \times \bar{r}_2). \quad (2.20)$$

Это свойство тоже объясняется просто. Умножив вектор (т. е. его длину) на $\lambda > 0$, мы в силу (2.16) именно на λ умножим и площадь параллелограмма, т. е. длину вектора \bar{n} . Если же $\lambda < 0$, то направление одного из векторов изменится на противоположное, что повлечет за собой и изменение направления вектора \bar{n} .

3. Векторное произведение подчиняется распределительному закону:

$$(\bar{r}_1 + \bar{r}_2) \times \bar{r}_3 = \bar{r}_1 \times \bar{r}_3 + \bar{r}_2 \times \bar{r}_3. \quad (2.21)$$

Доказывать это мы не будем — поверьте нам, пожалуйста, на слово. Правила (2.19) и (2.20) вместе с (2.21) дают аналогичное (2.12) свойство линейности:

$$(\alpha \bar{r}_1 + \beta \bar{r}_2) \times \bar{r}_3 = \alpha (\bar{r}_1 \times \bar{r}_3) + \beta (\bar{r}_2 \times \bar{r}_3).$$

При этом надо следить за порядком векторных множителей!

4. Как и для скалярного произведения нам следует составить таблицу векторного умножения базисных векторов. Мы договоримся, что векторы \bar{i} , \bar{j} , \bar{k} образуют *правую тройку*, т. е. расположены как три первых пальца правой руки (рис. 8, а), и здесь вращение от \bar{i} к \bar{j} из конца

вектора \bar{k} будет видно против часовой стрелки. Именно отсюда следует, что

$$\bar{i} \times \bar{j} = \bar{k}, \quad \bar{j} \times \bar{k} = \bar{i}, \\ \bar{k} \times \bar{j} = -\bar{i}$$

и т. д. Это дает нам право составить такую таблицу умножения:

\times	\bar{i}	\bar{j}	\bar{k}
\bar{i}	0	\bar{k}	$-\bar{j}$
\bar{j}	$-\bar{k}$	0	\bar{i}
\bar{k}	\bar{j}	$-\bar{i}$	0

(2.22)

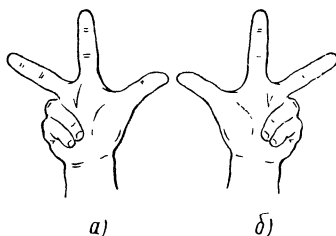
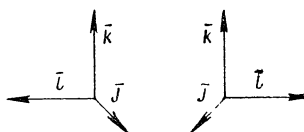


Рис. 8

Иногда базисные векторы \bar{i} , \bar{j} , \bar{k} располагают как пальцы левой руки (рис. 8, б). В этом случае целесообразно соответствующим образом изменить и определение векторного произведения. Мы будем пользоваться только правой тройкой.

5. Выразим векторное произведение через координаты множителей. Имеем:

$$\begin{aligned} \bar{r}_1 \times \bar{r}_2 &= (x_1 \bar{i} + y_1 \bar{j} + z_1 \bar{k}) \times (x_2 \bar{i} + y_2 \bar{j} + z_2 \bar{k}) = \\ &= x_1 x_2 (\bar{i} \times \bar{i}) + y_1 x_2 (\bar{j} \times \bar{i}) + z_1 x_2 (\bar{k} \times \bar{i}) + x_1 y_2 (\bar{i} \times \bar{j}) + \\ &+ y_1 y_2 (\bar{j} \times \bar{j}) + z_1 y_2 (\bar{k} \times \bar{j}) + x_1 z_2 (\bar{i} \times \bar{k}) + y_1 z_2 (\bar{j} \times \bar{k}) + \\ &+ z_1 z_2 (\bar{k} \times \bar{k}). \end{aligned}$$

Группируя слагаемые, получаем:

$$\begin{aligned} \bar{r}_1 \times \bar{r}_2 &= (y_1 z_2 - y_2 z_1) \bar{i} + (z_1 x_2 - z_2 x_1) \bar{j} + \\ &+ (x_1 y_2 - x_2 y_1) \bar{k}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Но посмотрите внимательно! Ведь эта запись похожа на (2.5). Поэтому предыдущую формулу можно переписать так:

$$\bar{r}_1 \times \bar{r}_2 = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} \bar{i} + \begin{vmatrix} x_2 & x_1 \\ z_2 & z_1 \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \bar{k} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}. \quad (2.24)$$

§ 5. СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ТРЕХ ВЕКТОРОВ

Не попытаться ли каким-то разумным образом ввести произведение трех векторов? Ограничимся одним из возможных вариантов: первые два вектора перемножим векторно, а потом это произведение (вектор!) помножим на третий вектор скалярно. В результате получим скаляр:

$$V = (\bar{r}_1 \times \bar{r}_2) \cdot \bar{r}_3. \quad (2.25)$$

Пусть $\bar{r}_1 = x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k}$, $\bar{r}_2 = x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k}$, $\bar{r}_3 = x_3\bar{i} + y_3\bar{j} + z_3\bar{k}$. Тогда, пользуясь формулами (2.23) и (2.12), получим:

$$V = (y_1z_2 - z_1y_2)x_3 + (z_1x_2 - x_1z_2)y_3 + \\ + (x_1y_2 - y_1x_2)z_3$$

и, применяя формулу (2.5), можем записать:

$$V = \begin{vmatrix} x_3 & y_3 & z_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Легко проверить, что верна и другая запись (она получается из предыдущей двумя перестановками строк; мы пользуемся при этом четвертым свойством определителей, указанным в первом параграфе):

$$V = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Таким образом, все три вектора в этом произведении равноправны и можно ввести обозначение

$$V = \bar{r}_1 \cdot \bar{r}_2 \cdot \bar{r}_3 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \quad (2.26)$$

Такое произведение трех векторов называется *смешанным*. Фактически это есть еще одна краткая запись определителя третьего порядка. Поэтому, между прочим, получается:

$$\bar{r}_1 \cdot \bar{r}_2 \cdot \bar{r}_3 = -(\bar{r}_2 \cdot \bar{r}_1 \cdot \bar{r}_3). \quad (2.27)$$

Имеют место и правила вынесения скалярного множителя за знак смешанного произведения, и распределительный закон, так как они имеют место и для скалярного и для векторного произведений.

Геометрический смысл числа V очень прост: это число с точностью до знака равно объему параллелепипеда, построенного на векторах \vec{r}_1 , \vec{r}_2 , \vec{r}_3 (рис. 9). В самом деле,

$$\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 \cdot \vec{r}_3 = (\vec{r}_1 \times \vec{r}_2) \cdot \vec{r}_3 = \\ = |\vec{r}_1 \times \vec{r}_2| \cdot |\vec{r}_3| \cdot \cos \varphi =$$

$$= S \cdot |\vec{r}_3| \cdot \cos \varphi.$$

Но $|\vec{r}_3| \cos \varphi$ есть не что иное, как высота параллелепипеда, для которого S — площадь его основания.

Условие

$$\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 \cdot \vec{r}_3 = 0 \quad (2.28)$$

может означать или равенство нулю хотя бы одного из трех векторов, или параллельность двух из них (тогда равно нулю одно из векторных произведений, т. е. пропорциональны две строки определителя), или компланарность всех трех векторов, т. е. параллельность их одной и той же плоскости.

§ 6. ВЕКТОР-ФУНКЦИИ

Понятие функции хорошо известно каждому, кто хоть немного занимался математикой. В школе изучались так называемые элементарные функции: $y = ax + b$, $y = ax^2$, $y = \sin x$, $y = \log_a x$ и т. д.

С понятием элементарной функции ассоциируются два множества: 1) множество чисел, на котором функция определена, 2) множество чисел, состоящее из всех значений функции. Первое множество называют иногда областью определения функции, второе — областью ее значений. Для функции $y = ax + b$ оба множества состоят из всех действительных чисел (рис. 1). Для функции $y = ax^2$ первое множество состоит из всех действительных чисел, а второе — из всех действительных неотрицательных чисел (рис. 2). Для функции $y = \sin x$ первое множество — тоже все действительные числа (вся числовая прямая). Однако в качестве второго множества выступают лишь все те числа y , для которых $|y| \leq 1$, т. е.

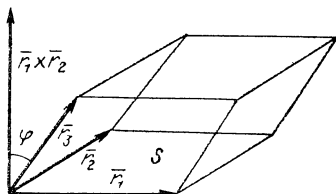


Рис. 9

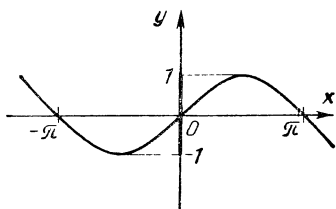


Рис. 10

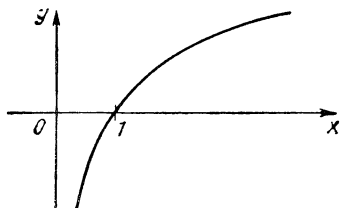


Рис. 11

отрезок $[-1, 1]$ числовой прямой (его можно отметить на оси Oy — см. рис. 10). Для функции $y = \log_a x$, наоборот, второе множество — все действительные числа, а первое — только положительные (рис. 11). Еще сложнее обстоит дело с областью определения функции $y = \operatorname{tg} x$. Это — числовая прямая, из которой выброшены все точки, соответствующие числам, кратным $\frac{\pi}{2}$ (аргумент x , конечно, измеряется в радианах), т. е. область определения состоит из бесчисленного множества интервалов: $\dots] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$, \dots (рис. 12).

Все это хорошо известно и довольно удобно при работе с конкретными функциями. Но мы будем иметь дело с функциями более общими, записываемыми обычно в виде $y = f(x)$ или $y = y(x)$, где $f(x)$ или $y(x)$ — в каком-то смысле произвольная функция. Более того, мы хотим обобщить и понятия области определения и области значений. Поэтому мы примем следующее определение:

Числовой функцией одного переменного называется отображение некоторого подмножества D_1 множества R_1 (так обозначается множество всех действительных чисел) на подмножество D_2 того же множества.

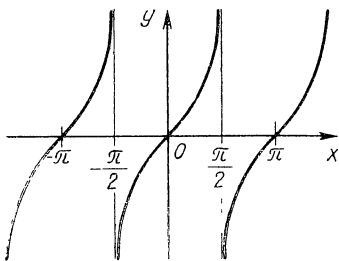


Рис. 12

Очевидно, для элементарных функций в качестве D_1 и D_2 фигурировали области определения и значений, иногда совпадавшие (функция $y = ax + b$), иногда различные (остальные примеры, рассмотренные выше). Слова «ото-

бражение... на» означают, что каждому элементу множества D_1 соответствует один элемент множества D_2 , причем получаются все элементы последнего.

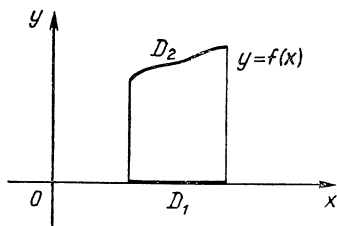


Рис. 13

При изучении и применении элементарных функций точное определение множеств D_1 и D_2 играет существенную роль. При общем же задании числовой функции $y = f(x)$ приходится делать следующие предположения. Множество D_1 состоит из некоторой точки (числа) x_0 и некоторой ее окрестности (т. е. содержащего ее интервала), такой, что функция $f(x)$ определена во всех точках этой окрестности; множество D_2 есть просто множество всех значений функции, соответствующих всем точкам из D_1 . Окрестность D_1 всегда можно представить себе в виде отрезка прямой. Множество же D_2 можно представить и как некоторое множество чисел, и как множество точек графика функции (рис. 13). Тут мы и подходим к важному обобщению: множество D_2 , как множество точек графика, уже не есть, просто числовое множество. Это — множество точек плоскости.

Если функция является не слишком сложным отображением, то можно говорить, что для отрезка D_1 мы имеем отображение его на *линию* D_2 . Но чтобы D_2 соответствовало интуитивному представлению о линии, на отображение (т. е. на функцию) необходимо наложить некоторые ограничения. Ими являются требования непрерывности и дифференцируемости (т. е. существования производной) для всех точек из D_1 . Поэтому, например, для функции $y = \operatorname{tg} x$ не следует включать в D_1 точки $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$ и т. п., для $y = \log_a x$ — точку $x = 0$ и т. д. Правда, при этом мы лишаемся возможности изучить «всю функцию», «весь график». Но на это надо идти, если мы хотим сохранить возможность рассуждать о произвольной точке произвольной линии, хотя бы в малой ее окрестности. Это ограничение носит название *локального* (locus — место) рассмотрения. Такое рассмотрение будет у нас фигурировать всегда. От него можно отказываться только в кон-

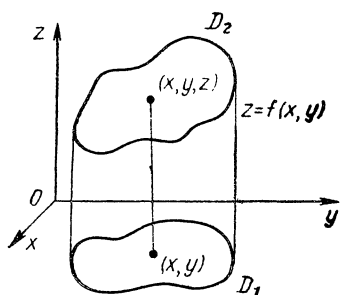


Рис. 14]

кретных примерах, где иногда удается рассмотреть и «всю» функцию.

Теперь еще одно обобщение. Возьмем в качестве D_1 множество точек плоскости. Оно эквивалентно множеству пар (x, y) действительных чисел — декартовых координат этих точек. Если взяты все точки (все пары чисел), то такое множество обозначается R_2 . Итак, D_1 есть подмножество множества R_2 .

В качестве D_2 возьмем некоторое подмножество множества R_1 (элементы этого множества обозначим z). Тогда отображение D_1 на D_2 можно записать в виде

$$\{(x, y)\} \rightarrow \{z\}$$

или в виде

$$z = f(x, y)$$

и назвать его *числовой функцией двух переменных*. Если же в качестве D_2 рассматривать множество троек чисел (x, y, z) , где $z = f(x, y)$, и трактовать эти тройки чисел как координаты точек трехмерного пространства, то получится график нашей функции (рис. 14). При ограничениях, соответствующих локальной точке зрения, этот график называется *поверхностью*. Сразу оговоримся, что мы не будем пользоваться таким способом задания поверхностей, хотя до появления первых работ Гаусса он был общепринятым.

Итак, в качестве множества значений функции могут выступать не только числовые, но и точечные множества на плоскости и в пространстве. В этом суть только что указанных обобщений. Но при координатном рассмотрении точка имеет две или даже три координаты, в результате возникают громоздкие записи. Существенное упрощение может быть обеспечено тем, что точку всегда можно задать радиус-вектором, т. е. вектором, начало которого помещено в начало координат, а конец — в рассматриваемую точку. Если O — начало координат, то вектор $\vec{r} = \vec{OM}$ и называется радиус-вектором точки M (рис. 15).

Очень важно, что точка M и радиус-вектор \bar{r} имеют одни и те же координаты, так как

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}.$$

На плоскости, очевидно, будет $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j}$. Значит, если мы хотим задать отображение подмножества D_1 множества R_1 на множество точек, то в качестве элементов множества надо брать радиус-векторы! Так возникает идея «векторно-значной» функции, имеющая огромное значение в современной математике. Приведем ее определение.

Вектор-функция одного скалярного аргумента есть отображение некоторого подмножества D_1 множества R_1 на некоторое подмножество D_2 множества E_3 (или E_2).

Здесь через E_3 обозначается множество векторов трехмерного пространства, а через E_2 — множество векторов плоскости.

Если в качестве D_1 взят отрезок числовой прямой (координаты точек этой прямой будем обозначать буквой t), а в качестве векторов — радиус-векторы, то получится отображение отрезка на множество точек пространства (или плоскости) — концов этих радиус-векторов. Естественно писать:

$$\bar{r} = \bar{r}(t).$$

При соответствующих локальному рассмотрению ограничениях можно говорить, что функция $\bar{r} = \bar{r}(t)$ определяет *линию*.

Так как всегда $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ и $x = \bar{r} \cdot \bar{i}$, $y = \bar{r} \cdot \bar{j}$, $z = \bar{r} \cdot \bar{k}$, то задание вектор-функции $\bar{r} = \bar{r}(t)$ равносильно заданию трех скалярных функций:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

Рассмотрим три примера.

1. Пусть дана функция

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + t\bar{b}, \quad (2.29)$$

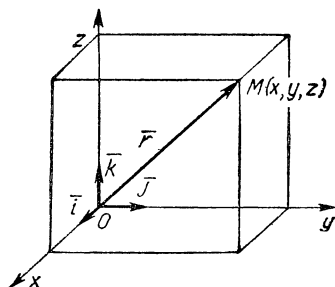


Рис. 15

где \bar{r}_0 и \bar{b} — два постоянных вектора, причем \bar{r}_0 — радиус-вектор (рис. 16). Очевидно, при всех t мы получаем сумму неподвижного радиус-вектора \bar{r}_0 и переменного вектора $t\bar{b}$ (меняется только длина, направление остается тем, которое задает вектор \bar{b}). Иначе говоря, конечная точка радиус-вектора \bar{r} будет описывать прямую, проходящую через точку M_0 в направлении вектора \bar{b} . В частности, при $\bar{r}_0 = 0$ прямая будет проходить через начало координат, при $\bar{b} \parallel \bar{k}$ она окажется параллельной оси Oz и т. д.

2. Рассмотрим вектор-функцию

$$\bar{r} = \bar{e}(t) = \cos t \bar{i} + \sin t \bar{j}. \quad (2.30)$$

Если \bar{e} считать радиус-вектором (рис. 17), то его координаты $\cos t$ и $\sin t$ являются координатами точки M окружности единичного радиуса, так как $|\bar{e}| = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 1$. Таким образом, уравнение (2.30) определяет окружность единичного радиуса. Очевидно, уравнение

$$\bar{r}(t) = a\bar{e}(t), \quad a > 0 \quad (2.31)$$

определит окружность радиуса a . Разумеется, центры окружностей (2.30) и (2.31) совпадают с началом координат.

Просим читателя запомнить обозначение (2.30). Мы постоянно будем им пользоваться.

3. Дана вектор-функция

$$\bar{r} = a\bar{e}(t) + bt\bar{k}, \quad a > 0, \quad b > 0. \quad (2.32)$$

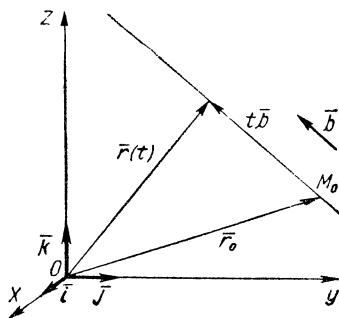


Рис. 16

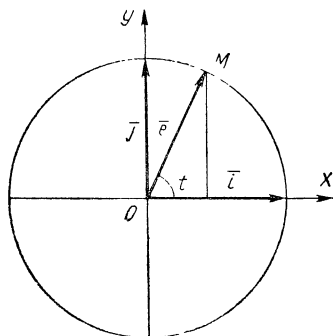


Рис. 17

Это уже *пространственная* кривая. Попробуем построить ее «по точкам», считая t , как всегда, радианной мерой угла. При $t=0$ второе слагаемое равно нулю, $a\bar{e}(0) = a\bar{i}$ и получается точка $A_0(a, 0, 0)$, лежащая на оси абсцисс. При возрастании t конец вектора $a\bar{e}(t)$ будет равномерно двигаться по окружности радиуса a против часовой стрелки (если смотреть сверху, т. е. оттуда, куда направлен вектор \bar{k}). Слагаемое $b\bar{t}\bar{k}$ даст равномерное движение вверх по поверхности цилиндра радиуса a со скоростью b (рис. 18).

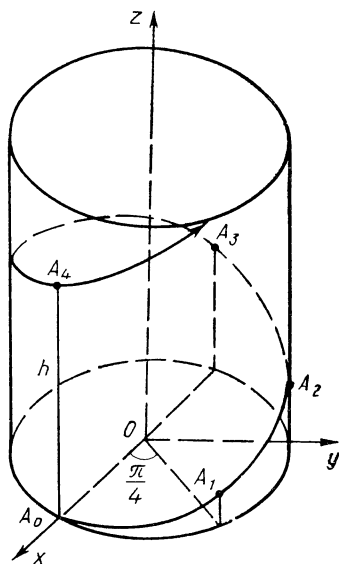


Рис. 18

Составим таблицу нескольких значений вектор-функции (2.32):

t	\bar{r}	Координаты точки кривой
0	$a\bar{i}$	$A_0(a, 0, 0)$
$\frac{\pi}{4}$	$a\frac{\sqrt{2}}{2}\bar{i} + a\frac{\sqrt{2}}{2}\bar{j} + \frac{b\pi}{4}\bar{k}$	$A_1\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}, \frac{a\sqrt{2}}{2}, \frac{b\pi}{4}\right)$
$\frac{\pi}{2}$	$a\bar{j} + \frac{b\pi}{2}\bar{k}$	$A_2\left(0, a, \frac{b\pi}{2}\right)$
π	$-a\bar{i} + b\pi\bar{k}$	$A_3(-a, 0, b\pi)$
2π	$a\bar{i} + 2b\pi\bar{k}$	$A_4(a, 0, 2b\pi)$

Получилась хорошо известная в практике винтовая линия. Константа b показывает, на сколько поднимется точка линии, когда проекция радиус-вектора на плоскость xOy повернется на один радиан, а число $h = 2b\pi$, называемое шагом винтовой линии, показывает, на сколько поднимется точка линии, когда эта проекция опишет

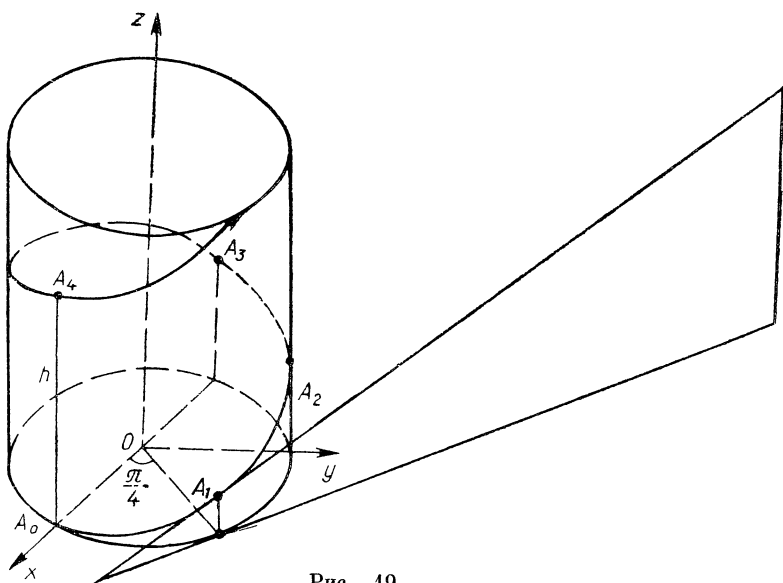


Рис. 19

полную окружность (винтовая линия сделает один виток). Винтовую линию легко построить (рис. 19), если взять прямой круговой цилиндр и навернуть на него вырезанный из бумаги прямоугольный треугольник. Если при этом горизонтальный катет сделать равным длине окружности цилиндра, то вертикальный как раз и даст шаг h , а гипотенуза — один виток винтовой линии. Из этого построения следует, что на развертке цилиндра винтовая линия обращается в прямую. Значит, винтовая линия соединяет две точки цилиндрической поверхности кратчайшим путем — факт очень важный!

Мы пока оставим винтовую линию — она нам еще встретится, а сейчас следующим образом определим понятие вектор-функции двух аргументов: вектор-функция двух скалярных аргументов есть отображение подмножества D множества R_2 на подмножество D^* множества E_3 .

Для такой функции принято обозначение

$$\bar{r} = \bar{r}(u, v). \quad (2.33)$$

Снова нетрудно сообразить, что ее задание эквивалентно заданию трех функций двух аргументов:

$x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v),$
причем можно написать:

$$\bar{r}(u, v) = x(u, v)\bar{i} + y(u, v)\bar{j} + z(u, v)\bar{k}. \quad (2.34)$$

Что представляет собой множество значений этой функции, а геометрически — множество точек, являющихся концами радиус-векторов $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$? При соответствующих ограничениях на функцию (локальность!) последнее множество называют поверхностью. Подтвердим правомерность такого названия примерами.

4. Дана функция

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + u\bar{a} + v\bar{b}, \quad (2.35)$$

где $\bar{a} \nparallel \bar{b}$. Отложим векторы \bar{a} и \bar{b} из конца вектора r_0 (рис. 20). Так как $\bar{a} \nparallel \bar{b}$, то эти два вектора определяют некоторую плоскость P . Но так как $\bar{r} - \bar{r}_0 = u\bar{a} + v\bar{b}$, то при любых u и v вектор $\bar{r} - \bar{r}_0$ будет компланарен с векторами \bar{a} и \bar{b} , а конец M вектора \bar{r} будет лежать в плоскости P . Иначе говоря, уравнение (2.35) есть уравнение плоскости. Условие компланарности трех векторов (равенство нулю смешанного произведения трех векторов, когда ни один из них не равен нулю и никакие два не параллельны, — об этом говорилось в конце предыдущего параграфа) дает возможность записать уравнение плоскости в «непараметрическом» виде (т. е. без u и v):

$$(\bar{r} - \bar{r}_0) \cdot \bar{a} \cdot \bar{b} = 0.$$

Смешанное произведение трех векторов можно записать и в виде скалярного произведения первого вектора на векторное произведение второго на третий, т. е. так: $(\bar{r} - \bar{r}_0) \cdot (\bar{a} \times \bar{b}) = 0$.

Если теперь обозначить

$$\bar{a} \times \bar{b} = \bar{n},$$

то мы получим уравнение плоскости, проходящей через данную точку M_0 (ее радиус-вектор есть \bar{r}_0) перпендикулярно данному вектору \bar{n} :

$$(\bar{r} - \bar{r}_0) \cdot \bar{n} = 0. \quad (2.36)$$

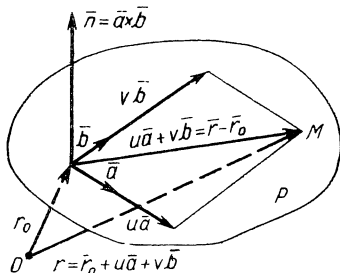


Рис. 20

Вектор \bar{n} называется нормалью этой плоскости. Заметим, что, изменяя только модули векторов \bar{a} и \bar{b} (а следовательно, и модуль вектора \bar{n}), мы не изменяем плоскость P .

5. Рассмотрим функцию

$$\bar{r}(u, v) = a \sin v \cdot \bar{e}(u) + a \cos v \bar{k}, \quad (2.37)$$

где $\bar{e}(u)$ определяется по формуле (2.30). Так как вектор \bar{e} компланарен с \bar{i} и \bar{j} , то $\bar{e} \perp \bar{k}$, поэтому можно вычислить модуль вектора $\bar{r}(u, v)$ по формуле (2.15):

$$|\bar{r}| = \sqrt{a^2 \sin^2 v + a^2 \cos^2 v} = a,$$

т. е. геометрически функция (2.37) определяет сферу радиуса a с центром в начале координат.

6. Рассмотрим вектор-функцию

$$\bar{r}(u, v) = v \bar{e}(u) + b u \bar{k}. \quad (2.38)$$

Вопрос тот же: что представляет собой множество концов радиус-вектора $\bar{r}(u, v)$? Пусть сначала $v = 0$. Тогда (2.38) примет вид: $\bar{r}(u) = b u \bar{k}$. Но это, как мы уже установили (см. пример 1), — прямая, во-первых, проходящая через начало координат и, во-вторых, параллельная оси Oz . Иначе говоря, при $v = 0$ уравнение (2.38) определяет саму ось Oz .

Пусть теперь $v = v_0 = \text{const}$. Тогда наше уравнение примет вид:

$$\bar{r}(u, v_0) = v_0 \bar{e}(u) + b u \bar{k}.$$

Но это (сравни с (2.32)) уже известная нам винтовая линия, лежащая на цилиндре радиуса v_0 и имеющая шаг $2b\pi$.

Если положить $u = 0$, а v вновь сделать переменным, то получится $\bar{r}(0, v) = v \bar{i}$, т. е. это опять-таки прямая, проходящая через начало координат, но параллельная уже оси Ox . Иначе говоря, при $u = 0$ уравнение (2.38) определяет ось абсцисс.

Что произойдет, если и u и v станут изменяться одновременно? Прямая $\bar{r} = v \bar{i}$, совпадавшая с осью Ox , начнет перемещаться так, что точка $v = 0$ будет описывать ось Oz , а сама прямая будет вращаться вокруг этой оси, оставаясь параллельной плоскости xOy и описывая каждой своей точкой $v = v_0 \neq 0$ винтовые линии. Можно сказать и так: получится поверхность, образованная винтовым движением прямой, пересекающей некоторую другую пря-

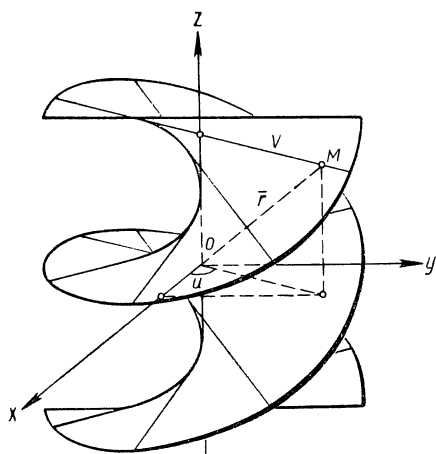


Рис. 21

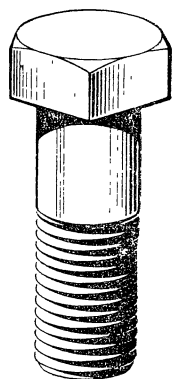


Рис. 22

мую (ось Oz) под прямым углом (рис. 21). Она называется *геликоидом* (от греческого $\epsilon\lambda\iota\sigma$ — спираль, винт) и является простейшей *винтовой поверхностью* (более сложные возникают при винтовом движении прямых линий, пересекающих ось Oz под углом, отличным от прямого).

Разнообразные геликоиды имеют широкое практическое применение. Объясняется это просто: геликоид образован сложением двух самых распространен-

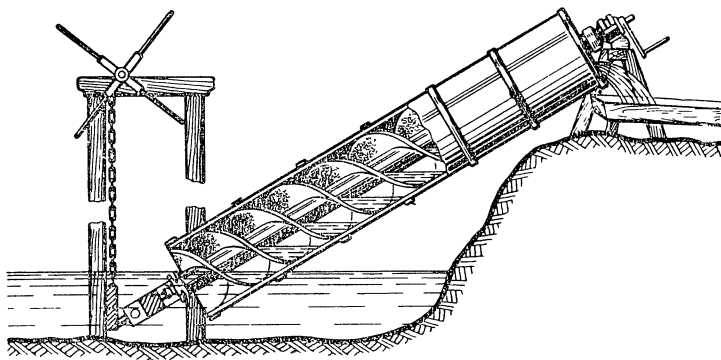


Рис. 23

ных видов движений — прямолинейного равномерного и вращательного, тоже равномерного. Поэтому геликоид можно применить там, где нужно перейти от одного из них к другому, что имеет место практически в любой машине.

Простейшие, распространеннейшие и, по-видимому, древнейшие примеры применения винтовых поверхностей — цилиндрические винты (рис. 22). Наглядное представление о положении отдельных прямых $u = u_0$ дают ступени винтовой лестницы.

Интересное применение геликоида предложено Архимедом — так называемый архимедов винт (рис. 23), предназначавшийся первоначально для подъема воды. Сейчас подобное устройство применяется для передвижения сыпучих и вязких материалов (обычно в этом случае его называют шнеком, от немецкого *schnecke* — улитка). Для того чтобы убедиться в распространенности шнеков, не надо куда-то ходить: шнек применяется в самой обыкновенной мясорубке.

Наконец, представление о геликоиде можно составить и наблюдая движение винта вертолета при его вертикальном взлете. Между прочим, ныне утвердилось название вертолет, а первоначально такие машины назывались геликоптерами (буквально «винтокрылыми»). Первый эскиз геликоптера был нарисован еще Леонардо да Винчи.

ОТ ДИФФЕРЕНЦИАЛОВ—К ФОРМУЛЕ ТЕЙЛОРА

Теперь напомним читателю известные ему из школьного курса и необходимые для дальнейшего чтения книги сведения по математическому анализу и дополним их некоторыми новыми фактами. Программа, наверное, ясна. Сначала придется уточнить то, что было у Лейбница, вспомнить, что такое производная, и разъяснить, что такое дифференциал. Затем надо будет распространить эти понятия на функции двух переменных и, наконец, на вектор-функции одного и двух скалярных аргументов.

Если что-то покажется трудноватым, то неврдно будет вернуться или к школьным учебникам, или к предыдущей главе.

Сначала обратимся к тому, что известно из школьного курса. Пусть дана числовая функция $y = f(x)$ одной переменной x . Фиксируем некоторое значение этой переменной x_0 . Ему соответствует $y_0 = f(x_0)$. Для любого значения переменной x и фиксированного ее значения x_0 можно говорить о разности

$$\Delta x = x - x_0$$

и соответствующей разности значений

$$\Delta y = y - y_0.$$

Последнюю принято также обозначать: $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$. Назовем Δx и Δy *приращениями* аргумента и функции и сформулируем такое определение:

Производной функции f в точке x_0 называется предел отношения приращения $\Delta f(x_0)$ функции f к приращению Δx , когда это последнее стремится к нулю.

Это определение символически записывается так:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{\Delta x}. \quad (3.1)$$

В соответствии с определением предела из (3.1) получаем, что при всех достаточно малых Δx

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \approx f'(x_0),$$

и, значит,

$$\Delta f(x_0) \approx f'(x_0) \cdot \Delta x. \quad (3.2)$$

Смысл приближенного равенства (3.2) состоит в следующем. Разность между его левой и правой частями есть функция от Δx . Обозначим ее через $R(\Delta x)$. Тогда

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + R(\Delta x), \quad (3.3)$$

где функция $R(\Delta x)$ такая, что

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{R(\Delta x)}{\Delta x} = 0. \quad (3.4)$$

Последнее равенство легко доказывается. Действительно, если поделить (3.3) почленно на Δx , то получится:

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + \frac{R(\Delta x)}{\Delta x}.$$

Перейдя к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$, получим:

$$f'(x_0) = f'(x_0) + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{R(\Delta x)}{\Delta x},$$

откуда сразу следует (3.4).

Первое слагаемое в равенстве (3.3), т. е. выражение $f'(x_0) \cdot \Delta x$, называется главной частью приращения функции.

Все это очень похоже на то, что мы видели у Лейбница. Только теперь уже не надо ни графика функции, ни касательной, ни вообще обращения к наглядным представлениям.

Подчеркнем еще раз то, что мы заметили, читая Лейбница: главная часть приращения функции f является линейной функцией от Δx (т. е. Δx входит в формулу для приращения в первой степени), тогда как $R(\Delta x)$ заведомо нелинейна (иначе этого остатка просто не было бы: он вошел бы в главную часть).

Напомним, что производная $f'(x_0)$ определена (т. е. существует) не для любой функции и не в любой точке. Поэтому имеет смысл ввести понятие дифференцируемой функции.

Очевидно, что существование производной (дифференцируемость) и наличие равенства (3.3) с условием (3.4) — равносильные предложения. Действительно, (3.3) и (3.4) получены в предположении существования производной $f'(x_0)$. Если же следовать Лейбницу (вспомним гл. I) и предположить, что имеют место равенство

$$\Delta f(x_0) = k(x_0)\Delta x + R(\Delta x) \quad (3.5)$$

и условие

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{R(\Delta x)}{\Delta x} = 0, \quad (3.6)$$

то, поделив в равенстве (3.5) правую и левую части на Δx и перейдя к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$, получим:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = k,$$

чем доказано существование производной $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$.

Отсюда возникает мысль о следующем определении:

Функция $f(x)$ называется *дифференцируемой* в точке $x = x_0$, если имеют место равенство (3.5) и условие (3.6). Главная линейная часть приращения функции, т. е. $k \cdot \Delta x$, называется *дифференциалом* функции и обозначается df , а коэффициент

$$k(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$$

называется производной в точке x_0 и обозначается $\frac{df}{dx}$.

Именно эти обозначения и ввел Лейбниц. Если в частном случае $f(x) = x$, то из (3.5) получим:

$$\Delta f(x) = k \cdot \Delta x,$$

и так как $k = f'(x) = 1$, то приращение независимого переменного (разумеется, достаточно малое) тоже можно называть дифференциалом и обозначать dx . Теперь смысл символа $\frac{dy}{dx}$ становится очевидным: это — отношение дифференциалов. Читается оп «дэ игрек по дэ икс». Обозначе-

ние $\frac{ay}{dx}$, несмотря на некоторую громоздкость, успешно соперничает с более поздним y' или $f'(x)$, так как в нем ясно проглядывает сущность понятия производной, выражаемая равенством

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Для второй, третьей и т. д. производных Лейбниц ввел символы $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ и т. д., которые, конечно, значительно менее удобны и понятны (читается: «дэ два игрек по дэ икс дважды» и т. д.).

Определение производной можно распространить и на случай двух и более переменных. Это совсем нетрудно сделать, используя обобщение по аналогии — простейшую логическую дорогу в математике. Построим такое определение:

Функция $f(x, y)$ называется *дифференцируемой* в точке (x_0, y_0) плоскости R^2 , если имеют место равенство

$$\Delta f(x_0, y_0) = k\Delta x + l\Delta y + R(\Delta x, \Delta y) \quad (3.7)$$

и условия

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y = 0}} \frac{R(\Delta x, \Delta y)}{\Delta x} = 0, \quad \lim_{\substack{\Delta y \rightarrow 0 \\ \Delta x = 0}} \frac{R(\Delta x, \Delta y)}{\Delta y} = 0. \quad (3.8)$$

Главная линейная часть приращения Δf , т. е. выражение $df = k\Delta x + l\Delta y$, называется *дифференциалом* функции, а коэффициенты k и l — *частными производными* функции.

Читатель, конечно, понимает смысл символов Δx и Δy : это приращения каждого из двух аргументов x и y функции f . Обратите внимание на условия дифференцируемости: первое требует обращения в нуль остатка $R(\Delta x, \Delta y)$ при $\Delta x \rightarrow 0$ и постоянном y ($\Delta y = 0$), а второе — обращения в нуль этого остатка при $\Delta y \rightarrow 0$ и постоянном x ($\Delta x = 0$).

Для функции двух переменных мы получаем две производные:

$$k = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y = 0}} \frac{\Delta f}{\Delta x}, \quad l = \lim_{\substack{\Delta y \rightarrow 0 \\ \Delta x = 0}} \frac{\Delta f}{\Delta y}.$$

Следуя Лейбницу, французский математик Адриен Мари Лежандр (1752—1833) в 1786 г. предложил обозначить их $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$. Более употребительны и удобны обозначения f'_x и f'_y , или, еще короче, f_x и f_y .

Применяя эти обозначения, имеем:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy, \quad (3.9)$$

или

$$df = f_x dx + f_y dy. \quad (3.10)$$

Итак,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta y}.$$

Техника вычисления дифференциалов простейших функций, дифференциалов сумм и произведений функций, а также дифференциалов сложных функций («функций от функций») была дана еще Лейбницем (не случайно формула дифференцирования произведения носит его имя). Формулы, полученные Лейбницем и нужные нам сейчас, легко получаются из формул, которые даны в школьном курсе для производных. Надо лишь заменить $f'(x)$ на $\frac{dy}{dx}$ и умножить обе части формул на dx . Например, для двух функций $u(x)$ и $v(x)$ имеем:

$$\begin{aligned} (u \cdot v)' = u'v + v'u &\Rightarrow \frac{d(u \cdot v)}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot v + \frac{dv}{dx} \cdot u \Rightarrow \\ &\Rightarrow d(uv) = v \cdot du + u \cdot dv \quad (\text{формула Лейбница}); \end{aligned}$$

а для функции $f(x) = x^n$ получаем:

$$(x^n)' = nx^{n-1} \Rightarrow \frac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1} \Rightarrow dx^n = nx^{n-1}dx$$

и т. д.

Правила дифференцирования функций одного переменного почти тривиально обобщаются на случай нескольких переменных. Например, для двух функций $f(x, y)$ и $g(x, y)$ появляются правила частного дифференцирования:

$$(f + g)_x = f_x + g_x, \quad (fg)_y = f_y g + fg_y$$

и т. д.

Наконец, напомним правило дифференцирования сложной функции

$$\frac{df(x(t))}{dt} = \frac{df}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}. \quad (3.11)$$

На функции двух переменных оно распространяется следующим образом. Если

$$\varphi(t) = f(x(t), y(t)),$$

то

$$\frac{d\varphi}{dt} = f_x \frac{dx}{dt} + f_y \frac{dy}{dt}, \quad (3.12)$$

а для дифференциала будем иметь снова формулу, аналогичную (3.10):

$$d\varphi = f_x \cdot dx + f_y dy. \quad (3.13)$$

Фактически формулы (3.12) и (3.13) получаются друг из друга делением или умножением на dx .

Читатель видит, что распространение простейших правил и формул дифференциального исчисления на функции двух переменных требует не столько новых знаний, сколько внимания и аккуратности в записи формул и выполнении преобразований. Так же легко удастся распространить определение дифференцируемой функции и дифференциала на векторные функции.

Рассмотрим вектор-функцию $\bar{r}(t)$ одного скалярного аргумента. Фиксируем некоторое значение аргумента t_0 . Ему соответствует значение функции $\bar{r}_0 = \bar{r}(t_0)$. Для любого значения аргумента t и фиксированного его значения t_0 можно говорить о разности скаляров

$$\Delta t = t - t_0 \quad (3.14)$$

и соответствующей разности векторов — значений вектор-функции:

$$\Delta \bar{r} = \bar{r}(t) - \bar{r}(t_0). \quad (3.15)$$

Назовем Δt и $\Delta \bar{r}$ приращениями аргумента и функции и сформулируем такое определение:

Производной вектор-функции $\vec{r}(t)$ в точке t_0 называется предел отношения приращения $\Delta \vec{r}$ к приращению Δt , когда последнее стремится к нулю.

Это определение можно записать так:

$$\vec{r}'(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t}.$$

А из определения следует, что для достаточно малых Δt

$$\Delta \vec{r}(t_0) \approx \vec{r}'(t_0) \Delta t. \quad (3.16)$$

Смысл приближенного равенства (3.16) в том, что оно заменяет точное равенство

$$\Delta \vec{r}(t_0) = \vec{r}'(t_0) \Delta t + \vec{R}(\Delta t), \quad (3.17)$$

где вектор-функция $\vec{R}(\Delta t)$ такая, что

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{R}(\Delta t)}{\Delta t} = 0. \quad (3.18)$$

Условия (3.17) и (3.18) гарантируют существование производной $\vec{r}'(t)$.

Геометрический смысл производной вектор-функции скалярного аргумента близок к геометрическому смыслу производной числовой функции. Как известно, производная функции $f(x)$ в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику функции в точке $f(x_0)$. Сама же касательная может быть определена как предельное положение секущей.

Вектор-функция $\vec{r} = \vec{r}(t)$ определяет некоторую линию как множество концов радиус-векторов (см. § 6), а $\Delta \vec{r}$ есть хорда (рис. 24). Вектор же $\vec{r}'(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ дает

направление предельного положения этой хорды, т. е. прямой, которую и называют касательной к линии. Итак, вектор $\vec{r}'(t_0)$ параллелен касательной к линии $\vec{r} = \vec{r}(t)$ в точке $t = t_0$. На рисунке 24 виден и геометрический

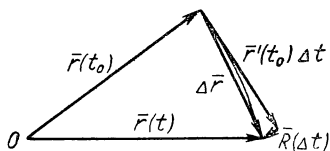


Рис. 24

смысл равенства (3.17), и смысл замены приращения Δr дифференциалом $d\bar{r} = \bar{r}'(t_0)\Delta t$, и вектор $\bar{R}(\Delta t)$, показывающий допускаемую при этой замене погрешность.

Заметим, что правила дифференцирования для суммы вектор-функций и их скалярного произведения ничем не отличаются от соответствующих правил обычного дифференциального исчисления. При дифференцировании же векторного и смешанного произведений надо следить за сохранением порядка множителей, например:

$$(\bar{r}_1 \times \bar{r}_2)' = \bar{r}_1' \times \bar{r}_2 + \bar{r}_1 \times \bar{r}_2'.$$

Так же просто получаются определения и правила для вектор-функций нескольких переменных.

Нам остается отметить связь между дифференцируемостью векторной функции и дифференцируемостью обычных функций, являющихся ее координатами.

Прежде всего заметим, что базисные векторы \bar{i} , \bar{j} , \bar{k} постоянны и, следовательно, дифференцируемы (их дифференциалы равны нулю). Рассмотрим теперь вектор-функцию

$$\bar{r}(t) = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k}. \quad (3.19)$$

Пусть функции $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ в некоторой точке (одной и той же для всех трех функций) дифференцируемы. Дифференциал суммы трех функций равен сумме дифференциалов этих функций, — это и есть дифференциал функции $\bar{r}(t)$.

Пусть теперь вектор-функция $\bar{r}(t)$ дифференцируема. Покажем, что из этого следует дифференцируемость ее координат. Умножая (3.19) скалярно на \bar{i} и учитывая, что $\bar{i} \cdot \bar{j} = \bar{i} \cdot \bar{k} = 0$, $\bar{i} \cdot \bar{i} = 1$, получим:

$$\bar{r}(t) \cdot \bar{i} = x(t).$$

Так как вектор \bar{i} постоянен (и, следовательно, дифференцируем), то и произведение $\bar{r}(t) \cdot \bar{i}$ и функция $x(t)$ дифференцируемы.

Повторив эти рассуждения относительно функций $y(t)$ и $z(t)$, убедимся, что и они дифференцируемы. Доказана теорема:

Условия дифференцируемости вектор-функции $\bar{r}(t)$ и всех ее координат (одновременно, т. е. при одном и том же значении t) эквивалентны.

Все сказанное в этой главе до сих пор не было принципиально новым для хорошо подготовленного читателя — мы лишь напомнили материал, известный из курса математики IX класса, и построили некоторые обобщения. Но теперь нам предстоит сделать принципиальный шаг вперед.

Вернемся вновь в XVII в. Лейбница однажды спросили: какого он мнения о Ньюtone? «Если взять математиков от начала мира до Ньютона, то окажется, что Ньютон сделал половину, и притом лучшую половину».

Напомним некоторые факты хорошо известной биографии Исаака Ньютона. Детство его протекало в небогатой, но обеспеченной семье. Далее — учеба в школе без выдающихся успехов, страстная любовь к чтению и изготовлению всякого рода действующих механизмов, вроде игрушечной ветряной мельницы, водяных часов и т. п., юношеская любовь, оставшаяся, по-видимому, не только первой, но и единственной, юношеские стихи...

В 1664—1665 гг. Европу — в который уж раз! — охватила эпидемия чумы. Кембриджский университет был закрыт и бакалавру изящных наук И. Ньютону пришлось уехать в свою родную деревню Вулсторп, где не было ни книг, ни приборов, и жить там. И если до этого времени биография Ньютона была биографией обыкновенного человека, то теперь это уже жизнеописание гения. За короткий срок он сделал важнейшие открытия: установил закон всемирного тяготения (еще в прошлом веке в Вулсторпе показывали яблоню, с которой упало яблоко, натолкнувшее Ньютона, как говорит легенда, на этот закон); экспериментально доказал, что белый солнечный свет представляет собой смесь компонентов разных цветов; изобрел — задолго до Лейбница — метод «флюксий» (так Ньютон называл производные); установил, как с помощью этого метода можно отыскивать касательные и кривизны непрерывных кривых (о том, что такое кривиз-



И. Ньютон

на, нам предстоит говорить дальше); открыл биномиальную формулу. Собственно, все последующие годы жизни (Ньютон умер в 1727 г.) он совершенствовал и развивал то, что сумел сделать в эти неполные два года.

Из открытий, сделанных Ньютоном, многие уже известны читателю, но об одном очень важном открытии мы пока ничего не говорили, не говорится о нем, к сожалению, и в школьном курсе математики, хотя именно это открытие — может быть, более любого другого — характеризует Ньютона как математика и ученого.

Для Ньютона математика была главным образом орудием в исследованиях по физике, а в этих исследованиях, в частности в решении уравнений, связывающих между собой дифференциалы функций и сами функции (дифференциальные уравнения), результат надо было получать не в общем виде — чего обычно вполне хватало Лейбницу, — а в виде конечных числовых решений. Инструментом для таких вычислений оказались изобретенные Ньютоном (здесь у него почти не было предшественников) бесконечные ряды, начало которым положено открытием биномиальной формулы.

Для натурального показателя эта формула была известна задолго до Ньютона. Два простейших случая знакомы каждому школьнику (квадрат и куб двучлена):

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2; \\ (a + b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.\end{aligned}$$

Для произвольного натурального показателя формула выглядит так:

$$(a + b)^n = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2}b^2 + \dots + b^n.$$

Ньютон сделал решительный шаг вперед, обобщив формулу для отрицательных и дробных показателей. Нам сейчас не очень уж важно, как именно он это сделал, мы ограничимся лишь одним примером и важными выводами — для этого и начат разговор.

Построим формулу разложения двучлена $(1 + x)^{-1}$. Заметим сначала, что $(1 + x)^{-1} = \frac{1}{1 + x}$. А теперь будем делить числитель на знаменатель так, как делят натуральные числа — уголком:

$$\begin{array}{r}
 - \frac{1}{1+x} \quad | \frac{1+x}{1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+\dots} \\
 \hline
 -x \\
 -x-x^2 \\
 \hline
 -x^2 \\
 -x^2+x^3 \\
 \hline
 -x^3 \\
 -x^3-x^4 \\
 \hline
 -x^4 \\
 -x^4+x^5 \\
 \hline
 -x^5 \\
 \vdots
 \end{array}$$

Деление не заканчивается, получается что-то — если продолжить аналогию с делением в арифметике — вроде периодической дроби. Нельзя ли считать, что

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \dots?$$

Кстати, внимательный читатель уже заметил, что получилась бесконечная убывающая геометрическая прогрессия и ее сумма, если только $|x| < 1$.

Что же здесь интересного? Слева — дробь, справа — многочлен с бесконечным числом членов. Ньютон показал, что и при других отрицательных показателях (слева — дроби) и даже при дробных показателях (слева — корни) разложение двучлена представляет собой именно многочлены подобного рода. Более того, оказалось, что в виде многочленов представимы и куда более сложно устроенные функции. Введение таких многочленов (бесконечных рядов) сыграло в развитии математического анализа колоссальную роль. И это очень легко понять: одно дело работать с какой-либо весьма непростой функцией и совсем другое — с многочленом. Правда, многочлен-то необычный, у него бесконечное число членов, и это требует известной осторожности и большой аккуратности. В математическом анализе есть специальный раздел — теория рядов, знание которого значительно облегчает решение практических задач. Практическое решение задач естествознания как раз и интересовало Ньютона, его учеников и продолжателей. Их, правда, было не так много, как у Лейбница, но имена Колина Маклорена (1698—1746) и Брука Тейлора (1685—1731) навсегда остались в науке именно в связи с развитием теории рядов.

Нас будут интересовать не сами ряды (бесконечные многочлены), а формулы, дающие приближенное представление дифференцируемой функции в виде многочлена. Они и называются формулами Тейлора и Маклорена. Мы выпишем их для вектор-функции, имеющей четыре производные.

Формула Тейлора имеет вид:

$$\begin{aligned}\bar{r}(t_0 + \Delta t) = \bar{r}(t_0) + \bar{r}'(t_0) \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \bar{r}''(t_0) (\Delta t)^2 + \\ + \frac{1}{6} \bar{r}'''(t_0) (\Delta t)^3 + \bar{R}_3(\Delta t),\end{aligned}\quad (3.20)$$

где

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\bar{R}_3(\Delta t)}{(\Delta t)^3} = 0, \quad (3.21)$$

причем $\Delta t = t - t_0$.

Формула Маклорена получается из формулы Тейлора при $t_0 = 0$. Естественно в этом случае писать вместо Δt одну букву, например τ . Итак,

$$\bar{r}(\tau) = \bar{r}(0) + \bar{r}'(0) \tau + \frac{1}{2} \bar{r}''(0) \tau^2 + \frac{1}{6} \bar{r}'''(0) \tau^3 + \bar{R}_3(\tau), \quad (3.22)$$

где

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\bar{R}_3(\tau)}{\tau^3} = 0. \quad (3.23)$$

Если потребуется более точное приближение, то — при условии существования соответствующих производных — можно получить многочлены более высоких степеней. Закон получения числовых коэффициентов очевиден: при k -й степени коэффициент равен $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k}$.

Читатель, которого интересует только геометрическая сторона дела, может принять формулы (3.20—3.23) на веру. Для тех, кому интересно узнать доказательство, наметим его идею для формулы Маклорена.

Мы знаем, что

$$\Delta \bar{r}(t_0) = \bar{r}'(t_0) \Delta t + R(\Delta t).$$

Так как $\Delta \bar{r} = \bar{r}(t_0 + \Delta t) - \bar{r}(t_0)$, то эту формулу можно переписать следующим образом:

$$\bar{r}(t_0 + \Delta t) = \bar{r}(t_0) + \bar{r}'(t_0) \Delta t + \bar{R}(\Delta t).$$

Фиксируя t , мы не налагали на него каких-либо ограничений, — значит, формула справедлива при любых t , в частности при $t = 0$:

$$\bar{r}(\Delta t) = \bar{r}(0) + r'(0)\Delta t + \bar{R}(\Delta t).$$

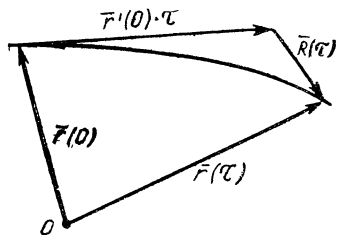


Рис. 25

Если окажется, что $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\bar{R}(\Delta t)}{\Delta t} = 0$, т. е. функция \bar{r} дифференцируема, то точное равенство можно заменить приближенным:

$$\bar{r}(\Delta t) \approx \bar{r}(0) + \bar{r}'(0)\Delta t.$$

Это выражение напоминает уравнение прямой в примере 1 § 6 второй главы. Действительно, заменяя приближенное равенство на точное и вводя новое переменное $\tau = \Delta t$, мы получим уравнение касательной:

$$\bar{r}(\tau) = \bar{r}(0) + \bar{r}'(0) \cdot \tau.$$

Иначе говоря, мы получили значение вектор-функции \bar{r} в точке τ в виде суммы двух векторов: первый получается при аргументе, равном нулю, а второй есть произведение производной вектор-функции в той же точке на число τ . Это значение вектор-функции есть первое ее приближение в виде многочлена первой степени. Подчеркнем, что хотя функция $\bar{r}(t)$ может быть и очень сложно устроенной, первое ее приближение в точке t_0 нам удалось выразить совсем просто. Прост и геометрический смысл всей этой операции (рис. 25).

Но нам нужно более точное значение $\bar{r}(\tau)$. Пока имеем:

$$\bar{r}(\tau) = \bar{r}(0) + \bar{r}'(0)\tau + \bar{R}(\tau). \quad (3.24)$$

Функция $\bar{R}(\tau)$ представима (учитывая (3.18)) в виде

$$\bar{R}(\tau) = \bar{R}_1(0)\tau^2 + \bar{R}_2(\tau), \quad (3.25)$$

так как $\bar{R}(\tau)$ заведомо нелинейна. Слагаемое $\bar{R}_2(\tau)$ должно по аналогии с (3.18) удовлетворять условию:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\bar{R}_2(\tau)}{\tau^2} = 0. \quad (3.26)$$

Если это так, то формула (3.24) теперь примет вид:

$$\bar{r}(\tau) = \bar{r}(0) + \bar{r}'(0)\tau + \bar{R}_1(0)\tau^2 + \bar{R}_2(\tau). \quad (3.27)$$

Выведем значение коэффициента $\bar{R}_1(0)$. Применив формулу (3.24) к функции $\bar{r}'(\tau)$ (ее производная есть, как известно, $\bar{r}''(\tau)$), получим:

$$\bar{r}'(\tau) = \bar{r}'(0) + \bar{r}''(0)\tau + \bar{R}^*(\tau), \quad (3.28)$$

где

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\bar{R}^*(\tau)}{\tau} = 0. \quad (3.29)$$

Это же значение производной $\bar{r}'(t)$ можно также найти, продифференцировав формулу (3.27). Получается:

$$\bar{r}'(\tau) = \bar{r}'(0) + 2\bar{R}_1(0)\tau + \frac{d\bar{R}_2}{d\tau}. \quad (3.30)$$

Вычтем равенство (3.30) из равенства (3.28):

$$0 = \bar{r}''(0)\tau - 2\bar{R}_1(0)\tau + \bar{R}^*(\tau) - \frac{d\bar{R}_2}{d\tau}.$$

Поделив на τ , получим:

$$0 = \bar{r}''(0) - 2\bar{R}_1(0) + \frac{\bar{R}^*(\tau)}{\tau} - \frac{1}{\tau} \frac{d\bar{R}_2}{d\tau}. \quad (3.31)$$

Перейдем к пределу при $\tau \rightarrow 0$. Первые два слагаемых от τ не зависят, а два последних обращаются в нуль в силу (3.29) и (3.26). Следовательно,

$$\bar{R}_1(0) = \frac{1}{2} \bar{r}''(0),$$

что соответствует (3.22). Далее работает аналогия.

Заметим в заключение, что условие (3.29) гарантировало существование второй производной, а условие (3.26) — третьей. Отсюда следует, что формулы (3.22) и (3.20) предполагают существование четвертых производных, или, как иногда говорят, четырехкратной дифференцируемости функции $\bar{r}(t)$.

ОТ ПРОСТЕЙШИХ КРИВЫХ — К РЕПЕРУ ФРЕНЕ

Читателю может показаться, что в предыдущих главах мы очень уж ушли от геометрии. Зачем это сделано? Ведь не ради же винтовой линии, геликоида и формулы Тейлора самих по себе? Они, конечно, очень интересны, но стоило ли так много трудиться ради столь частных достижений? Стоило! И мы сейчас попробуем убедиться в этом, вновь обратившись к истории геометрии, к Евклиду и даже к доевклидовским временам.

Первоначальными объектами исследований безымянных ученых доэллинских времен и прославленных греческих математиков были фигуры, образованные прямыми, плоскостями и их частями. Одновременно появилась и первая кривая линия — окружность. С этого геометрического образа начинается изучение систематического курса геометрии в VI классе. Недаром в классической математике важнейшее место занимало решение задач на построение с помощью циркуля и линейки, т. е. построения с помощью окружностей и прямых.

Изучение окружности привело и к изучению первых кривых поверхностей, полученных с ее помощью, — сферы, кругового цилиндра, кругового конуса. К этому же, конечно, вели и обычные наблюдения — немало сфер, цилиндров и конусов встречается в природе и технике сегодня, встречалось и в эллинские времена. Кстати, слово «цилиндр» ($\kappa\lambda\upsilon\nu\delta\rho\omicron\sigma$) в переводе с греческого означает «каток», «валик», а конус ($\kappa\omega\nu\omicron\sigma$) — «сосновая шишка».

При рассмотрении сечений цилиндра и конуса плоскостями появились эллипс, гипербола и парабола; впервые

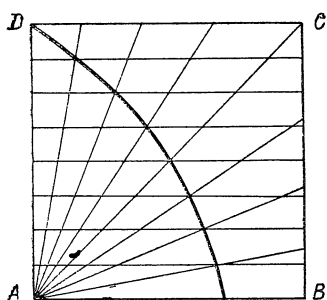


Рис. 26

еще в V в. до н. э. Гиппием, — кривая, которую Лейбниц позднее назвал квадратрисой. Строится эта кривая так. Дан квадрат $ABCD$ (рис. 26). Пусть сторона DC равномерно опускается вниз, а сторона AD равномерно вращается вокруг точки A так, что обе они достигают положения AB одновременно. Множество точек пересечения этих сторон и образует квадратрису. В современных обозначениях ее уравнение имеет вид:

$$y = x \operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2|AB|}.$$

Квадратриса понадобилась Гиппию для выполнения трисекции угла. С помощью квадратрисы можно также построить квадрат, равновеликий данному кругу.

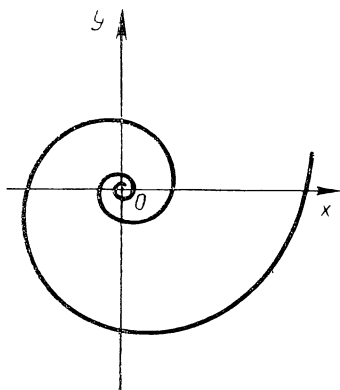


Рис. 27

такие сечения построил в IV в. до н. э. греческий математик Мeneхм. Один из крупнейших математиков эпохи эллинизма — Аполлоний Пергский (умер в 170 г. до н. э.) дал уже достаточно полное изложение теории конических сечений.

Кроме этих трех кривых, античным ученым было известно еще несколько. Самая древняя из них, введенная

По-видимому, размышления над квадратурой круга и задачей о вычислении длины окружности (ни того, ни другого у Евклида нет!) привели Архимеда к исследованию спирали, названной впоследствии его именем. Эта кривая строится (только опять-таки механическими движениями, а не с помощью циркуля и линейки!) очень просто. Луч OX начинает равномерно вращаться вокруг точки O , одновременно точка M начинает рав-

номерно двигаться по этому лучу из точки O (рис. 27). В современных обозначениях для этой кривой мы тоже получаем трансцендентное уравнение, имеющее вид:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = a \operatorname{arctg} \frac{y}{x},$$

где a — постоянное число.

Ко временам Декарта накопился довольно большой запас сведений о различных плоских кривых (т. е. таких кривых, все точки которых принадлежат одной и той же плоскости). Назрела необходимость их классификации. Декарт, создавший аналитическую геометрию, начал ее. Оказалось, что все конические сечения, в том числе и окружность, могут быть заданы алгебраическими уравнениями второй степени. Их стали называть кривыми второго порядка.

Дальше естественно рассмотреть уравнения третьей степени, потом четвертой... Ньютон дал классификацию всех кривых, соответствующих уравнениям третьей степени, — получилось 72 типа! Клод Алекси Клеро (1713—1765) в двенадцатилетнем возрасте попытался построить классификацию кривых четвертого порядка и написал об этом свою первую научную работу.

Стало ясно, что всевозможных плоских кривых — великое множество, классифицировать их необычайно трудно, а изучать каждую по отдельности и вовсе невозможно. К тому же многие известные и практически важные кривые нельзя задать алгебраическими уравнениями относительно декартовых координат. Такими кривыми являются графики тригонометрических функций, квадратриса, спираль Архимеда и др. Это плоские кривые, чего же следовало ожидать от пространственных? Аналитическая геометрия Декарта не давала достаточно общих методов для изучения кривых и поверхностей, надо было привлечь какое-то другое, более мощное средство. Им и оказались дифференциалы.

Исследования с помощью дифференциалов применимы сразу ко всем кривым или поверхностям и ко всем их точкам, кроме некоторых, где не выполняются определенные условия.

Условия эти довольно жесткие. Прежде всего, приходится рассматривать только такие части кривых и поверхностей, которые могут быть заданы дифференцируемыми



Д. Гильберт

функциями, а условие дифференцируемости (т. е. существования дифференциалов) часто нарушается даже в весьма простых случаях. Но, как скоро мы узнаем, и этих условий еще недостаточно. Если поверхность или кривую задавать вектор-функциями, то придется потребовать, чтобы первые производные этих функций не были равны нулю, а точки, в которых это происходит, рассматривать отдельно. Появятся и другие ограничения.

Поэтому на первых порах (а в нашей книжке мы дальше и не пойдем) приходится ограничиваться исследованием лишь небольшой области изменения переменных (аргументов вектор-функций). Впрочем, «небольшой» — слово неточное, оно означает только то, что аргументам нельзя придавать произвольные значения, не рискуя сделать грубую ошибку. Иными словами, нужно ограничиваться локальным изучением. Но, несмотря на все эти ограничения, результаты исследования будут гораздо глубже и важнее, чем сколь угодно подробное исследование какой-нибудь отдельной кривой или поверхности. Вот зачем нам понадобилось так много трудиться в предыдущих главах.

И все-таки, может быть, существуют более элементарные, наглядные приемы?

...В 1920—1921 гг. один из крупнейших математиков мира Давид Гильберт (1862—1943) читал в Геттингене курс «Наглядной геометрии», предназначенный для широкого круга слушателей. На основе этого курса через десять лет возникла одна из лучших в мировой литературе популярных книг по математике — «Наглядная геометрия»¹. В предисловии к ней сказано: «Пусть читатель прогуливается в огромном саду геометрии, в котором каждый может выбрать себе такой букет, какой ему нравится».

¹ Соавтором Д. Гильберта является Стефан Кон-Фоссен (1902—1936), немецкий математик, который после эмиграции в Советский Союз многое сделал для развития советской геометрической школы.

«Букет», интересующий нас, находится в четвертой главе, называется она «Дифференциальная геометрия» (глава составляет почти треть всей книги). Здесь Гильберт, не пользуясь понятием дифференциала (видимо, он не предполагал наличия знаний о нем у своих слушателей и читателей), излагает многие свойства плоских и пространственных кривых, а также поверхностей, заменяя доказательства более или менее убедительными наглядными рассуждениями.

Вот как Гильберт описывает строение пространственной кривой. Сначала он определяет *касательную*, как «предельное положение секущей при слиянии двух точек пересечения». Далее Гильберт замечает, что множество перпендикуляров к касательной в точке касания образует плоскость (рис. 28). Эту плоскость называют *нормальной плоскостью*. Затем Гильберт говорит: «Теперь мы будем искать плоскость, которая наиболее близко подходит к кривой в рассматриваемой точке. С этой целью проведем плоскость через касательную в рассматриваемой точке и через соседнюю точку и будем следить за изменением положения этой плоскости, если соседняя точка будет приближаться к точке касания нашей касательной. Предельное положение, к которому стремится при этом плоскость, и определит искомую плоскость, называемую *соприкасающейся плоскостью* кривой в рассматриваемой точке» (рис. 29).

Прямую пересечения соприкасающейся плоскости с нормальной называют *главной нормалью*, а перпендикуляр к соприкасающейся плоскости — *бинормалью* (bi — два).

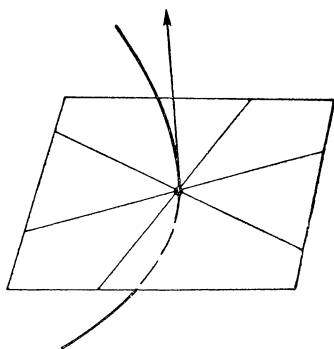


Рис. 28

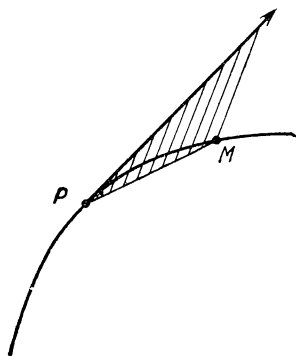


Рис. 29

Получились три взаимно перпендикулярные прямые, проходящие через рассматриваемую точку кривой. Они, очевидно, как и любая тройка взаимно перпендикулярных прямых, могут служить пространственной декартовой системой координат (рис. 30). Одновременно возникают и три взаимно перпендикулярные плоскости: нормальная, соприкасающаяся и *спрямляющая*.

Итак, касательная, главная нормаль и бинормаль могут служить осями координат в пространстве. Конечно, систему координат можно выбирать произвольно, но читатель, наверное, уже знает, что от выбора системы зависит вид уравнения. Например, уравнение сферы, вообще говоря, имеет вид:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2(ax + by + cz) + a^2 + b^2 + c^2 = r^2.$$

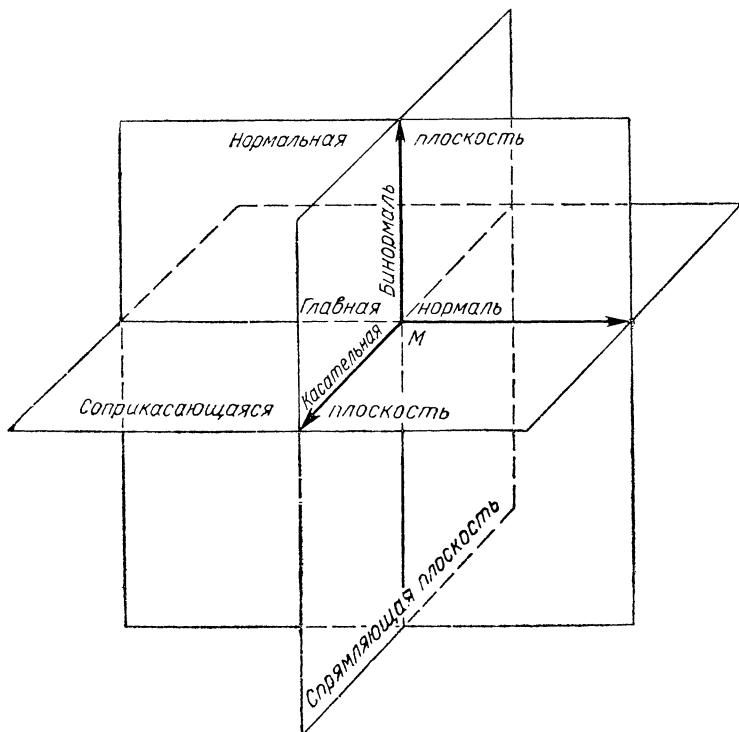


Рис. 30

А если поместить начало координат в центр сферы, то ее уравнение примет вид:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Иначе говоря, полезно, чтобы система координат была выбрана не как попало, а была бы связана с самой кривой или поверхностью. Если взять в качестве осей касательную, главную нормаль и бинормаль, то тут связь будет очень жесткой, от произвола исследователя уже совершенно не зависящей. Можно сказать, что такая система координат полностью определяется *самой кривой*, точнее, рассматриваемой точкой кривой и ближайшими к ней точками этой же кривой. Правда, в каждой точке кривой получается своя координатная система, но зато правило ее построения во всех точках, где это построение возможно, будет *одним и тем же и достаточно простым*.

Построенную таким образом систему координат называют теперь *подвижным каноническим репером* кривой. Гильберт не вводил этого длинного термина и очень осторожно пользовался соответствующим понятием, так как аппарат, имевшийся в распоряжении читателей его книги, не позволял использовать это понятие для исследований свойств кривой.

Вот один пример рассуждения Гильберта. На рисунке 30 мы намеренно не изобразили саму кривую, даже маленького ее кусочка, так как пока ничего не знаем о ее расположении относительно плоскостей репера: какие из них она пересекает, проходя через рассматриваемую точку (мы, как и Гильберт, обозначили ее буквой P), какие — нет? Гильберт говорит, что кривая пересекает соприкасающуюся плоскость и остается по одну сторону от плоскости векторов \bar{e}_1, \bar{e}_3 . То, что кривая пересекает еще и нормальную плоскость, представляется очевидным, так как эта плоскость перпендикулярна касательной. Но откуда следует, что она пересекает и соприкасающуюся плоскость, т. е. плоскость, «наиболее близкую к кривой»? Это уже гораздо менее очевидно, и Гильберт приводит следующее объяснение:

«Соприкасающаяся плоскость имеет в указанном выше смысле (см. цитату на с. 63) с кривой три совпадающие или общие точки. Отсюда следует, что она, вообще говоря, пересекает кривую в точке соприкосновения (т. е. в точке P)». Объяснение это мало убедительно, и, конечно, из

него никак не следует указанный Гильбертом факт. Для более или менее тонкого исследования кривой недостаточно использования только наглядных соображений.

В отличие от читателей книги Гильберта в распоряжении нашего читателя имеются и дифференциалы, и вектор-функции. Это и дает нам возможность ввести понятие подвижного канонического репера и использовать это понятие в дальнейшем.

Поясним термин «подвижной канонический репер». В переводе с французского «репер» (*repère*) значит «метка», «зарубка», т. е. нечто такое, что человек оставляет на исследуемом им предмете, чтобы выделить его среди других. Роль такой зарубки на кривой играет только что описанная нами система координат. Таким образом, в дифференциальной геометрии репер всегда есть некоторая система координат. То, что она для каждой точки своя, т. е. как бы движется (именно движется как твердое тело, состоящее из точки и трех взаимно перпендикулярных прямых, проходящих через нее¹) по кривой, и объясняет название «подвижной». Что же касается слова «канонический» ... Нелегко объяснить его происхождение современному читателю. Греческий корень «канон» (*κανων*) означает «правило», «предписание». Но в науке термин «канонический» вовсе не означает «правильный». Здесь есть некоторая связь с религией... У церковников существует выражение «следовать канону», «служить (в церкви) по канону». Это значит «действовать многократно (в принципе всегда) по одному и тому же правилу». В применении к реперу термин «канонический» тоже означает, что репер построен всегда (т. е. всюду, в любой точке и для любой линии $\bar{r} = \bar{r}(t)$), по одному и тому же геометрически определенному правилу: начало репера находится в рассматриваемой точке кривой, вектор \underline{e}_1 направлен по касательной, вектор \underline{e}_2 — по главной нормали, вектор \underline{e}_3 — по бинормали. Из построения ясно, что векторы \underline{e}_1 , \underline{e}_2 и \underline{e}_3 , как и известные нам векторы \underline{i} , \underline{j} и \underline{k} , взаимно перпендикулярны и модули их

¹ Можно изготовить такую модель: кусок проволоки, изображающей кривую, как-то закреплен; на проволоку надет шарик («точка») так, что он может по ней перемещаться; в шарик впаяны три взаимно перпендикулярные стрелки. Это и есть репер. При достаточно тщательном изготовлении это и будет тот самый репер, который описан выше.

равны единице. Начинает казаться, что и обозначать их надо теми же символами. Но этого делать нельзя по очень важной причине. Векторы \bar{i} , \bar{j} , \bar{k} связаны с выбранной исследователем системой прямоугольных декартовых координат, т. е. постоянны. Векторы же \bar{e}_1 , \bar{e}_2 , \bar{e}_3 подвижного репера связаны с самой кривой, они в каждой новой точке кривой, оставаясь взаимно перпендикулярными и равными по модулю единице, тем не менее меняют направления, т. е. являются переменными — функциями от t .

Разумеется, канонические реперы¹ строятся не только для кривых, но и для многих других геометрических образов. Аналитическая же работа (составление формул, вычисления по ним, их анализ и изучение по ним свойств этих образов) идет во всех случаях единообразно, аналогично. А аналогия, как известно, очень хороший помощник математического мышления.

Теперь мы можем по-настоящему взяться за теорию кривых, но предварительно полезно повнимательнее приглядеться к нашему новому инструменту — реперу.

Пусть пока он не будет каноническим репером кривой, а просто векторы \bar{r} , \bar{e}_1 , \bar{e}_2 и \bar{e}_3 будут функциями некоторого переменного t , причем векторы \bar{e}_1 , \bar{e}_2 , \bar{e}_3 все-таки образуют декартов базис (рис. 31). Эти четыре вектор-функции и надлежит исследовать. Из школьного курса начал анализа читатель знает, каким сильным инструментом исследования функций является производная. Надо полагать, что и производные функций \bar{r} , \bar{e}_1 , \bar{e}_2 и \bar{e}_3 помогут нам в решении поставленной задачи. Итак, рассмотрим производные

$$\frac{d\bar{r}}{dt}, \quad \frac{d\bar{e}_1}{dt}, \quad \frac{d\bar{e}_2}{dt}, \quad \frac{d\bar{e}_3}{dt}.$$

Как и всякий вектор, эти производные могут быть разложены по базису, однако для канонического репера характерно максимальное

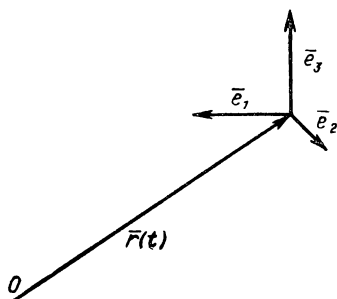


Рис. 31

¹ В дальнейшем мы будем опускать прилагательное «подвижной», так как все рассматриваемые реперы будут подвижными.

упрощение этих разложений, которое является следствием максимальной простоты его строения.

Прежде всего заметим, что так как $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ — декартов базис, то

$$\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_1 = 1, \quad \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2 = 0. \quad (4.1)$$

Эти равенства выполняются вдоль всей локально рассматриваемой кривой, т. е. при любых t . Значит, левые части их постоянны. Поэтому их производные равны нулю, т. е.

$$\bar{e}_1 \cdot \frac{d\bar{e}_1}{dt} + \frac{d\bar{e}_1}{dt} \cdot \bar{e}_1 = 0, \quad \bar{e}_1 \cdot \frac{d\bar{e}_2}{dt} + \frac{d\bar{e}_1}{dt} \cdot \bar{e}_2 = 0. \quad (4.2)$$

Из первого равенства следует, что $\frac{d\bar{e}_1}{dt} \perp \bar{e}_1$. То же самое получится для двух остальных векторов. Значит, производная вектора \bar{e}_1 разлагается только по векторам \bar{e}_2 и \bar{e}_3 , производная \bar{e}_2 — по \bar{e}_1 и \bar{e}_3 и производная \bar{e}_3 — по \bar{e}_1 и \bar{e}_2 . Поэтому можно записать:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{e}_1}{dt} &= k\bar{e}_2 + v\bar{e}_3, \\ \frac{d\bar{e}_2}{dt} &= \lambda\bar{e}_1 + \kappa\bar{e}_3, \\ \frac{d\bar{e}_3}{dt} &= \rho\bar{e}_1 + \sigma\bar{e}_2. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Теперь используем второе из равенств (4.2). Умножим скалярно первое равенство из (4.3) на \bar{e}_2 и второе равенство на \bar{e}_1 и результаты сложим. Получится:

$$0 = k\bar{e}_2 \cdot \bar{e}_2 + v\bar{e}_3 \cdot \bar{e}_2 + \lambda\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_1 + \kappa\bar{e}_3 \cdot \bar{e}_1.$$

Пользуясь правилами скалярного умножения базисных векторов (табл. 2.13), получаем: $\bar{e}_2 \cdot \bar{e}_2 = \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_1 = 1$, $\bar{e}_3 \cdot \bar{e}_2 = \bar{e}_3 \cdot \bar{e}_1 = 0$, т. е. $k + \lambda = 0$, или

$$\lambda = -k.$$

Точно так же получается:

$$\rho = -v, \quad \sigma = -\kappa.$$

Окончательно формулы (4.3) примут вид:

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{e}_1}{dt} &= k\bar{e}_2 + v\bar{e}_3, \\ \frac{d\bar{e}_2}{dt} &= -k\bar{e}_1 + \kappa\bar{e}_3, \\ \frac{d\bar{e}_3}{dt} &= -v\bar{e}_1 - \kappa\bar{e}_2.\end{aligned}\quad (4.4)$$

Составим таблицу коэффициентов правых частей этих формул:

	1	2	3
1	0	k	v
2	$-k$	0	κ
3	$-v$	$-\kappa$	0

(4.5)

Ее легко запомнить: по диагонали стоят нули, а коэффициенты, симметричные относительно этой диагонали, отличаются только знаком. Всего остается только три независимых коэффициента: k , v , κ . Чтобы подчеркнуть симметричность коэффициентов, формулы (4.4) записывают так, что место нулевых слагаемых остается пустым.

Важно отметить, что вид (4.4) имеют разложения производных базисных векторов для любого репера, если он является декартовой системой координат.

Мы уже знаем, что направление вектора \bar{e}_1 совпадает с направлением касательной к кривой (рис. 25). Поэтому

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \alpha(t)\bar{e}_1. \quad (4.6)$$

Эту формулу можно упростить. Переменное t пока выбрано произвольно: ведь речь идет о любой кривой $\bar{r} = \bar{r}(t)$. Заменим его, положив

$$t = t(s).$$

Тогда $\bar{r} = \bar{r}(t(s))$ и по правилам дифференцирования сложной функции (см. (3.14)) получаем:

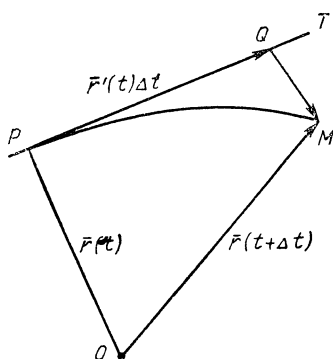


Рис. 32

$$\frac{d\bar{r}}{ds} = \frac{d\bar{r}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \alpha(t) \frac{dt}{ds} \cdot \bar{e}_1.$$

Формула упростится, если положить $\alpha(t) \cdot \frac{dt}{ds} = 1$,

т. е. $\alpha(t) \cdot dt = ds$,

откуда $\frac{ds}{dt} = \alpha(t)$, или

$$s = \int \alpha(t) dt + C.$$

Тогда формула (4.6) примет вид:

$$\frac{d\bar{r}}{ds} = \bar{e}_1. \quad (4.7)$$

Что касается формул (4.4), то они сохраняют свой вид при любом переменном, так как ортогональность репера не зависит от выбора кривой и ее уравнения.

Теперь нам надо использовать тот факт, что векторы \bar{e}_1 и \bar{e}_2 лежат в соприкасающейся плоскости. Эта плоскость проходит через точку кривой P , содержит касательную PT и близкую точку M кривой (рис. 32). На касательной отложим вектор

$$\overline{PQ} = \bar{r}'(t) \Delta t \parallel \bar{r}'.$$

Радиус-вектор $\bar{r}(t + \Delta t)$ точки M можно записать с помощью формулы Тейлора (3.20) так:

$$\bar{r}(t + \Delta t) = \bar{r}(t) + \bar{r}'(t) \Delta t + \frac{1}{2} \bar{r}''(t) (\Delta t)^2 + \bar{R}_2(\Delta t). \quad (4.8)$$

Но из рисунка 32 видно, что тот же радиус-вектор может быть выражен в виде суммы:

$$\bar{r}(t + \Delta t) = \bar{r}(t) + \bar{r}'(t) \Delta t + \overline{QM}. \quad (4.9)$$

Приравняв правые части равенств (4.8) и (4.9) и приведя подобные слагаемые, получим, что

$$\overline{QM} = \frac{1}{2} \bar{r}''(t) (\Delta t)^2 + \bar{R}_2(\Delta t).$$

Очевидно, что соприкасающаяся плоскость определяется векторами $\bar{r}'(t)$ и \overline{QM} , но направление второго нам пока неизвестно. Вспомнив, что $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\bar{R}_2(\Delta t)}{(\Delta t)^2} = 0$

(см. конец предыдущей главы), разделим последнее равенство на $(\Delta t)^2$ и перейдем к пределу:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{(\Delta t)^2} \overline{QM} = \frac{1}{2} \overline{r''}(t).$$

Так как направление вектора $\frac{1}{(\Delta t)^2} \overline{QM}$ не зависит от скалярного множителя $\frac{1}{(\Delta t)^2}$, то предельное направление вектора \overline{QM} совпадает с направлением вектора $\overline{r''}(t)$. Следовательно, соприкасающаяся плоскость параллельна и вектору $\overline{r'}(t)$, и вектору $\overline{r''}(t)$. Поэтому ее уравнение можно записать в виде

$$(\overline{R} - \overline{r}) \cdot \overline{r'} \cdot \overline{r''} = 0, \quad (4.10)$$

где \overline{R} — радиус-вектор произвольной точки соприкасающейся плоскости.

Будем считать, что вместо t уже взято новое переменное s . Тогда в силу (4.7) $\overline{r'} = \overline{e_1}$, а в силу (4.4)

$$\overline{r''} = \overline{e_1'} = k \overline{e_2} + \kappa \overline{e_3}.$$

Однако вектор $\overline{r''}$ параллелен соприкасающейся плоскости так же, как векторы $\overline{e_1}$ и $\overline{e_2}$ канонического репера. Поэтому в разложении по базису $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$ он не может содержать слагаемого с $\overline{e_3}$. Значит, $\kappa = 0$.

Теперь мы получаем такие формулы разложения производных от векторов канонического репера по его же базису:

$$\begin{aligned} \frac{d\overline{r}}{ds} &= \overline{e_1}, \\ \frac{d\overline{e_1}}{ds} &= k(s) \overline{e_2}, \\ \frac{d\overline{e_2}}{ds} &= -k(s) \overline{e_1} + \kappa(s) \overline{e_3}, \\ \frac{d\overline{e_3}}{ds} &= -\kappa(s) \overline{e_2}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Обычно они называются формулами Френе, по имени опубликовавшего их в 1852 г. (разумеется, не в векторной форме) французского математика Жана Фредерика Френе (1816—1900). Почти в то же самое время незави-

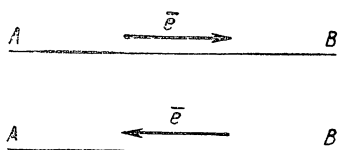


Рис. 33

симо от Френе эти формулы нашел другой французский геометр — Жозеф Альфред Серре (1819—1885). Позднее, уже после того, как появился сам термин «репер», построенный таким образом канонический репер тоже ста-

ли называть репером Френе. Многие зарубежные математики употребляют термин «репер Френе» в еще более широком смысле: называют так канонический репер любого геометрического образа.

Формулы (4.11) называют также деривационными, как и все аналогичные формулы для разложения производных векторов репера (от латинского derivatio — производная).

Следует заметить, что мы еще оставили небольшую свободу в выборе репера. Говоря «вектор \vec{e} направлен по прямой AB », мы еще не указываем, имеет ли место $\vec{e} \uparrow \overline{AB}$ или $\vec{e} \downarrow \overline{AB}$ (рис. 33), т. е. не указываем, в какую сторону смотрит стрелка, изображающая вектор. Решение этого вопроса называется выбором ориентации репера. Не сделав пока выбора ориентации векторов \vec{e}_1 и \vec{e}_2 , мы не определили и ориентации вектора \vec{e}_3 , который есть векторное произведение $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2$. Изменение ориентации, т. е. замена вектора \vec{e}_1 на $-\vec{e}_1$ или \vec{e}_2 на $-\vec{e}_2$, вызовет изменение знаков некоторых коэффициентов в деривационных формулах, т. е. знаков коэффициентов k и κ . Мы вернемся к этому вопросу в следующей главе.

**ОТ КАНОНИЧЕСКОГО РЕПЕРА—
К ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫМ ФОРМУЛАМ**

В предыдущих главах мы рассказали (в современных терминах) то, что было известно еще в середине XIX в. Однако простая и яркая идея связи геометрических образов с отнесенной к ним подвижной системой координат, зародившаяся в тот период, далеко не сразу получила признание и развитие. Так бывает с глубокими и плодотворными идеями почти всегда и почти во всех науках, так было и на этот раз. Потребовалось еще почти сто лет, понадобились труды еще десятков ученых, продолжавших и развивавших идею Френе и Серре. Среди них Гастон Дарбу, автор четырехтомной «Теории поверхностей» — энциклопедии дифференциальной геометрии конца XIX в., знаменитый итальянский геометр Луиджи Бианки, Вильгельм Бляшке, один из крупнейших немецких геометров XX в., и многие другие. Каждый из них сделал что-то свое, о каждом стоило бы рассказать подробно, но, наверное, для такого рассказа надо найти другое место. А здесь мы напишем лишь о двух ученых, с именами которых связано не просто движение вперед, а достижение принципиально нового и очень значительного рубежа.

Профессор Московского университета Сергей Павлович Фиников (1883—1964) и профессор Парижского университета Эли Жозеф Картан (1869—1951) познакомились в 1923 г., когда Фиников приехал во Францию. В те годы многие советские ученые работали в Лондоне, Берлине, Париже: советская наука еще только зарождалась и наше правительство очень заботилось об установлении и развитии ее международных контактов.



Э. Картан

других честных русских ученых приват-доцент С. П. Фиников покинул университет в знак протеста против действий царского министра просвещения Л. А. Кассо, исключившего из университета несколько тысяч студентов по политическим мотивам.

Для заграничной командировки Сергей Павлович оказался очень удачной кандидатурой. Свободно владея французским языком, прекрасно зная историю Франции, ее литературу и искусство, он быстро сошелся со многими французскими учеными, особенно с Эли Картаном.

Мы не можем здесь подробно говорить о научных работах Картана, отметим лишь, что во всех разделах математики, которыми он занимался (теория непрерывных групп, теория дифференциальных уравнений, дифференциальная геометрия), им получены фундаментальные результаты. Более того, современная проблематика дифференциальной геометрии в значительной степени определена его исследованиями. Характерной чертой творчества Картана было чрезвычайное идейное богатство. В наше время таких ученых называют «генераторами идей». Сформулировав ту или иную идею, Картан обычно не заботился о ее тщательной разработке, а старался находить ее приложения в самых различных областях математики.

Летом 1930 г. по приглашению Московского научно-исследовательского института математики и механики

Но С. П. Фиников уже давно знал труды Эли Картана. Он познакомился с ними еще в самом начале своей научной деятельности, когда по рекомендации известного математика профессора Болеслава Корнелиевича Млодзевского был оставлен при Московском университете для подготовки к профессорскому званию. Но звание это ему принесла только Советская власть. В 1911 г. вместе со своим учителем, вместе с С. А. Чаплыгиным, Н. Д. Зелинским, П. Н. Лебедевым, К. А. Тимирязевым, вместе с десятками

Картан приехал в Москву и прочел цикл лекций, положенных в основу книги «Метод подвижного репера, теория непрерывных групп и обобщенные пространства». Книга была издана в Москве в 1933 г. в переводе с французского, выполненном С. П. Финиковым. Больше в СССР Эли Картану побывать не пришлось. Многие произведения французского учебного переведены на русский язык и изданы в нашей стране, а в 1937 г. Казанское физико-математическое общество присудило ему Международную премию имени Н. И. Лобачевского за исследования по геометрии и теории групп.



С. П. Фиников

В двадцатые годы С. П. Фиников возглавил в Москве группу математиков, занявшихся изучением метода Картана, его приложениями и распространением на все более широкие области дифференциальной геометрии. Это привело к созданию в 1933 г. «Семинара по классической дифференциальной геометрии», которым Сергей Павлович руководил в течение тридцати лет. Научные семинары в нашей стране и во всех крупных математических центрах за рубежом — основная форма творческого общения математиков, работающих в близких областях науки. Семинары не имеют никаких официальных прав, дискуссии на них никем не регламентируются, единственным судьей является истина. На таком семинаре «родился» Никола Бурбаки. Всемирно известным семинаром была московская «лузитания» — семинар академика Н. Н. Лузина (1883—1950). Сейчас в нашей стране работает около двадцати семинаров по различным проблемам геометрии. Нельзя не подчеркнуть, что успех семинаров в значительной степени определяется личными качествами руководителя — его научной эрудицией, педагогической и общей культурой, организаторскими способностями, умением создать обстановку увлеченности, искренности и даже сердечности. Всеми этими качествами обладал С. П. Фиников.

В тридцатые годы XX в. в трудах Картана и Финикова теория подвижного репера была разработана до такой

степени, что ее применение для исследования уже не только кривых и поверхностей, но и гораздо более сложных геометрических образов приобрело алгоритмический характер.

Это значит, что можно сформулировать четкий план исследования, следуя которому первые, наиболее общие результаты теории того или иного геометрического образа, в частности кривой и поверхности, получаются почти автоматически. Конечно, дальнейшее, более подробное изучение геометрических образов идет в каждом случае по-разному, но исходные данные можно получать как бы по шаблону (в хорошем смысле этого слова).

Основные этапы плана исследования таковы:

1. Найти канонический репер. Это далеко не всегда просто. Иногда оказывается достаточно геометрических построений (так мы сделали при построении репера кривой), иногда помогает разработанный Эли Картаном аналитический алгоритм.

2. Найти деривационные формулы, в которых первые производные векторов репера выражаются через базис.

3. Выяснить геометрическое значение векторов репера (если это не сделано на первом этапе).

4. Найти все *инварианты*¹ геометрического образа, которые непосредственно определяются деривационными формулами, и выяснить их геометрическое значение. Совокупность этих инвариантов называется *полной системой*, так как установлено, что все другие инварианты являются их функциями. Таким образом, знание полной системы инвариантов позволяет получить любую информацию об исследуемом геометрическом образе.

5. Выяснить, существуют ли дифференциальные уравнения, связывающие инварианты полной системы.

6. Составляя простейшие уравнения относительно инвариантов (эти уравнения называются *натуральными*), начать классификацию изучаемых геометрических образов, например классификацию кривых или поверхностей.

В дифференциальной геометрии векторы \bar{e}_1 , \bar{e}_2 , \bar{e}_3 канонического репера являются инвариантами как от

¹ От французского *invariant*—«неизменяющийся». Инвариантами в математике называют такие величины, которые не изменяются при тех или иных преобразованиях или заменах переменных. Например, расстояние от одной точки до другой есть инвариант относительно перемещений.

носителю замены неподвижной системы координат, так и относительно замены переменных, при помощи которых задается геометрический образ.

Точка, служащая началом канонического репера, тоже является инвариантом.

В случае пространственной кривой радиус-вектор r начала канонического репера (т. е. радиус-вектор точки кривой) и векторы e_1, e_2, e_3 — функции переменного t . Относительно замены этого переменного они тоже являются инвариантами.

Обратимся к деривационным формулам (4.11). Являются ли инвариантами входящие в них коэффициенты k и κ ? Очевидно, что они зависят только от s :

$$k = k(s), \quad \kappa = \kappa(s). \quad (5.1)$$

А сама величина s ? Является ли инвариантом она? Очевидно, да, ибо только при таком выборе переменного, от которого зависит радиус-вектор точки кривой, отношение дифференциалов радиус-вектора ($d\bar{r}$) и самого переменного (ds) по модулю равно единице:

$$\left| \frac{d\bar{r}}{ds} \right| = 1. \quad (5.2)$$

Переменное s имеет и очень важное геометрическое истолкование, связанное с понятием длины дуги кривой.

По определению, длиной дуги \overline{AB} кривой называется предел периметра вписанной в нее ломаной при безграничном увеличении числа звеньев ломаной и стремлении каждого из них к нулю. Если этот предел существует, то дуга называется спрямляемой. Например, длину окружности можно определить так: вписать в нее правильный шестиугольник, а затем безгранично удваивать число его сторон. Предел периметра такого $6 \cdot 2^n$ -угольника при $n \rightarrow \infty$ и называется длиной окружности.

Пусть теперь для произвольной кривой $\bar{r} = \bar{r}(t)$ составлена вписанная ломаная из n звеньев (рис. 34).

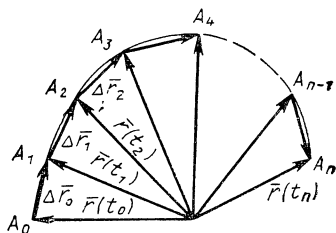


Рис. 34

Имеем:

$$|A_0 A_1| = |\bar{r}(t_1) - \bar{r}(t_0)| = |\Delta \bar{r}_0|.$$

Аналогично

$$|A_1 A_2| = |\Delta \bar{r}_1|, \quad |A_2 A_3| = |\Delta \bar{r}_2|$$

и т. д.

Периметр P_n ломаной из n звеньев равен сумме выражений $|\Delta \bar{r}_i|$, где i принимает значения от 0 до $n - 1$. В силу формулы (3.16) имеем:

$$|\Delta \bar{r}_i| \approx |\bar{r}'(t_i)| dt_i$$

(так как аргумент t монотонно возрастает, то $dt_i > 0$). Тогда

$$P_n \approx \sum_{i=0}^{n-1} |\bar{r}'(t_i)| dt_i. \quad (5.3)$$

Такая сумма есть не что иное, как приближенное выражение интеграла

$$\int_{t_0}^{t_n} |\bar{r}'(t)| dt.$$

Поэтому, переходя в приближенном равенстве (5.3) к пределу, получим формулу

$$\overline{AB} = \int_{t_A}^{t_B} |\bar{r}'(t)| dt. \quad (5.4)$$

Вопрос об условиях существования этого интеграла, т. е. предела суммы (5.3), мы рассматривать не будем. Просто предположим, имея в виду локальность рассмотрения, что для изучаемых нами кривых он существует.

Так как в силу (5.2)

$$|ds| = |d\bar{r}|$$

и при монотонном возрастании s всегда будет $|ds| = ds$, то

$$\frac{ds}{dt} = \left| \frac{d\bar{r}}{dt} \right|, \quad s = \int_{t_0}^t \left| \frac{d\bar{r}}{dt} \right| dt. \quad (5.5)$$

Сравнение с формулой (5.4) показывает, что функция $s(t)$ от произвольного (может быть, неинвариантного)

переменного t есть не что иное, как длина дуги, измеряемая от некоторой начальной точки $t = t_0$ (очевидно, что $s(t_0) = 0$).

Итак, величина s , заданная формулой (5.5), является инвариантом. Но тогда из (5.4) следует, что k и κ тоже являются инвариантами. Остается выяснить их геометрический смысл. Для этого нам сначала придется вернуться к вопросу об ориентации векторов репера (см. конец предыдущей главы).

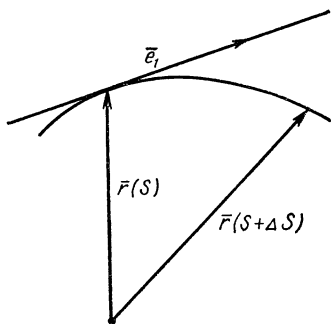


Рис. 35

Для выбора ориентации вектора \bar{e}_1 у нас есть естественные основания. Параметр s — длина дуги кривой. Этот параметр всегда можно мыслить монотонно возрастающим: передвигаясь по кривой, мы будем увеличивать ее длину, — значит, приращение всегда будет положительно. Конечно, вектор \bar{e}_1 надо направить так, чтобы он показывал направление возрастания длины дуги. В этом случае вектор \bar{e}_1 будет сонаправлен с вектором $\frac{d\bar{r}}{ds}$ и тем самым определится его ориентация (рис. 35). Это уже учтено в деривационных формулах: мы пишем $\frac{d\bar{r}}{ds} = \bar{e}_1$, а не $\frac{d\bar{r}}{ds} = -\bar{e}_1$, что соответствовало бы ориентации вектора \bar{e}_1 в сторону убывания параметра s .

Для определения ориентации вектора \bar{e}_2 потребуем, чтобы он был сонаправлен с вектором $\frac{d\bar{e}_1}{ds} = \frac{d^2\bar{r}}{ds^2}$. Это будет означать, что всюду, т. е. при любых s в формулах Френе $k > 0$. Это чисто аналитический выбор ориентации, но он имеет определенный геометрический смысл, который выяснится позднее.

Если векторы \bar{e}_1 и \bar{e}_2 ориентированы, то тем самым определена и ориентация вектора $\bar{e}_3 = \bar{e}_1 \times \bar{e}_2$.

Перейдем к выяснению геометрического смысла инварианта $k(s)$. Этот инвариант принято называть кривизной.

Из второй формулы Френе (гл. 4) находим:

$$\left| \frac{d\bar{e}_1}{ds} \right| = k |\bar{e}_2| = k \quad (5.6)$$

(учтено, что $k > 0$). Значит, k есть модуль отношения дифференциалов $d\bar{e}_1$ и ds . Величину $|d\bar{e}_1|$ можно трактовать как дифференциал дуги некоторой кривой, которая получится, если $\bar{e}_1(s)$ сделать радиус-вектором, т. е. откладывать все его значения из начала координат. Так как $|\bar{e}_1| = 1$, то все точки этой кривой будут находиться на сфере единичного радиуса (на рис. 36 векторы $\bar{e}_1(s)$ в нескольких точках кривой изображены направленными отрезками M_1A_1, \dots, M_6A_6 ; им на сфере соответствуют точки A_1, \dots, A_6). Такую кривую принято называть *сферической индикатрисой* данной пространственной кривой (от латинского *indico* — указываю, т. е. индикатриса — «указательница»). Двум различным не-

большим кускам кривой $\bar{r} = \bar{r}(s)$, имеющим одну и ту же длину Δs , будут отвечать, вообще говоря, разные по длине куски индикатрисы. Чем больше соответствующий кусок индикатрисы, тем больше угол между касательными в начале и конце куска данной кривой, тем быстрее поворачивается касательная, тем больше кривизна. Если касательная вообще не меняет своего положения, то индикатрисой окажется точка — легко сообразить, что это возможно только тогда, когда линия $\bar{r} = \bar{r}(s)$ — прямая.

Нам остается определить геометрический смысл третьего инварианта κ . Будем действовать, как это часто делается в математике, по

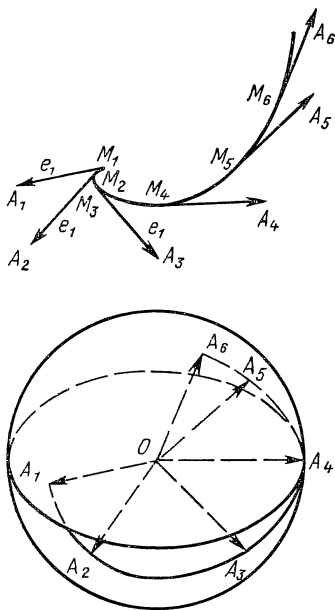


Рис. 36

аналогии. Возьмем последнюю формулу Френе:

$$\frac{d\bar{e}_3}{ds} = -\kappa \bar{e}_2.$$

Длины равных векторов, записанных в этой формуле справа и слева, равны, т. е.

$$\left| \frac{d\bar{e}_3}{ds} \right| = |\kappa| \cdot |\bar{e}_2|.$$

Поэтому

$$|\kappa| = \left| \frac{d\bar{e}_3}{ds} \right|. \quad (5.7)$$

Инвариант κ называется *кручением*.

Для иллюстрации понятия кручения можно построить конструкцию, аналогичную предыдущей, но уже для векторов $\bar{e}_3(s)$, и говорить, что, чем больше угол между бинормальными в начале и конце куска данной кривой, тем быстрее поворачивается бинормаль (или соприкасающаяся плоскость), тем больше модуль кручения. Не так легко, как в предыдущем рассуждении, но все же можно сообразить, что если соприкасающаяся плоскость вообще не меняет своего положения, то кривая $\bar{r} = \bar{r}(s)$ лежит в одной плоскости, а кручение равно нулю.

Мы почти завершили геометрическую характеристику репера и его инвариантов. Остались две мелочи: выяснить геометрическое значение ориентации вектора \bar{e}_2 и знака кручения κ (мы пока имеем только характеристику его модуля). Эти мелочи мы выясним, если попытаемся строго обосновать описанное Гильбертом (см. гл. IV) расположение кривой относительно ее канонического репера.

Пусть в точке $M_0(s_0)$ построен канонический репер. Будем давать параметру s (длине дуги) как положительные, так и отрицательные приращения $\Delta s = \sigma$. Разумеется, в самой точке M_0 будет $\sigma = 0$. Тогда мы будем получать близкие к M_0 точки, лежащие на кривой. Их радиус-векторы $\bar{\rho}(\sigma)$, имеющие начало в точке M_0 (рис. 37), и будут показывать расположение кривой относительно плоскостей репера.

Заметив, что радиус-вектор $\bar{\rho}(\sigma)$ есть разность векторов $\bar{r}(s_0 + \sigma)$ и $\bar{r}(s_0)$ и имея в виду, что точка M_1 близка

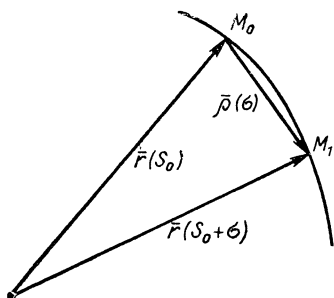


Рис. 37

к точке M_0 , применим для вычисления $\vec{r}(s_0 + \sigma)$ формулу Тейлора (3.35). Получим:

$$\begin{aligned} \vec{r}(s_0 + \sigma) = & \vec{r}(s_0) + \\ & + \vec{r}'(s_0) \sigma + \frac{1}{2} \vec{r}''(s_0) \sigma^2 + \\ & + \frac{1}{6} \vec{r}'''(s_0) \sigma^3 + \vec{R}_3, \end{aligned}$$

где $\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{\vec{R}_3}{\sigma^3} = 0$, а производные берутся по s . Найдем теперь

радиус-вектор $\vec{\rho}(\sigma) = \vec{r}(s_0 + \Delta s) - \vec{r}(s_0)$. Получим:

$$\vec{\rho}(\sigma) = \vec{r}'(s_0) \sigma + \frac{1}{2} \vec{r}''(s_0) \sigma^2 + \frac{1}{6} \vec{r}'''(s_0) \sigma^3 + \vec{R}_3. \quad (5.8)$$

Участвующие в этой формуле производные мы можем вычислить, воспользовавшись формулами Френе. Для первой производной имеем:

$$\vec{r}' = \vec{e}_1(s) \Big|_{s=s_0} = \vec{e}_1(s_0),$$

это просто первая формула Френе, только вместо производного s , естественно, записано «наше» значение параметра — s_0 . Символ $f(s) \Big|_{s=s_0}$ удобно употреблять вместо более привычного $f(s_0)$ в том случае, когда с $f(s)$ надо что-то проделать еще до подстановки $s = s_0$. Например, для второй производной с помощью второй формулы Френе получаем:

$$\vec{r}''(s_0) = \frac{d\vec{e}_1}{ds} \Big|_{s=s_0} = k(s_0) \vec{e}_2(s_0).$$

Здесь в выражение $\frac{d\vec{e}_1}{ds}$ значение $s = s_0$ подставлено после применения формулы Френе! Наконец, для третьей производной применим правило дифференцирования произведения и третью формулу Френе:

$$\begin{aligned} \vec{r}'''(s_0) = & \frac{d\vec{r}''}{ds} \Big|_{s=s_0} = \frac{d(k\vec{e}_2)}{ds} \Big|_{s=s_0} = k'(s_0) \vec{e}_2(s_0) + \\ & + k(s_0) (-k(s_0) \vec{e}_1(s_0) + \kappa(s_0) \vec{e}_3(s_0)). \end{aligned}$$

Теперь остается внести эти выражения в формулу (5.8). После группировки по векторам $\bar{e}_1(s_0)$, $\bar{e}_2(s_0)$, $\bar{e}_3(s_0)$ получим:

$$\begin{aligned}\bar{\rho}(\sigma) = & \left(\sigma - \frac{1}{6} k^2(s_0) \sigma^3 + R_{31} \right) \cdot \bar{e}_1(s_0) + \\ & + \left(\frac{1}{2} k(s_0) \sigma^2 + \frac{1}{6} k'(s_0) \sigma^3 + R_{32} \right) \cdot \bar{e}_2(s_0) + \\ & + \left(\frac{1}{6} k(s_0) \kappa(s_0) \sigma^3 + R_{33} \right) \cdot \bar{e}_3(s_0).\end{aligned}\quad (5.9)$$

Здесь R_{31} , R_{32} и R_{33} — координаты вектора \bar{R}_3 , каждая из которых после деления на σ^3 стремится к нулю при $\sigma \rightarrow 0$.

Смысл выражений, заключенных в скобки, очень прост: это координаты радиус-вектора точки M_1 кривой (а следовательно, и самой точки) относительно базиса \bar{e}_1 , \bar{e}_2 , \bar{e}_3 . Обозначим эти координаты x , y , z , т. е. положим

$$\bar{\rho}(\sigma) = x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2 + z\bar{e}_3 \quad (5.10)$$

Тогда в точке M_0 мы будем иметь систему координат, определяемую векторами репера.

Сравнивая (5.9) и (5.10), получаем для первой координаты:

$$x = \sigma - \frac{1}{6} k^2 \sigma^3 + R_{31}.$$

При достаточно малом σ имеем:

$$\sigma < 0 \Leftrightarrow x < 0,$$

$$\sigma = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

$$\sigma > 0 \Leftrightarrow x > 0,$$

т. е. знак координаты x совпадает со знаком параметра σ . Поэтому проекции радиус-вектора $\bar{\rho}(\sigma)$ на ось Ox , определяемую вектором \bar{e}_1 репера, находятся по разные стороны от нормальной плоскости yOz , определяемой векторами \bar{e}_2 и \bar{e}_3 репера и перпендикулярной оси Cx . Иными словами, кривая пересекает нормальную плоскость. Мы получили аналитическое подтверждение интуитивно очевидному факту, отмеченному еще в четвертой главе.

Однако далее интуиция уже мало помогает. Утверждение Гильберта о том, что кривая остается по одну сторону от плоскости векторов \bar{e}_1 , \bar{e}_3 (спрямляющей), на-

глядными соображениями и интуицией подтверждается слабо. Однако этот вопрос сразу решится, если мы, еще раз сравнив (5.9) и (5.10), выпишем вторую координату точки M_1 :

$$y = \frac{1}{2} k \sigma^2 + \frac{1}{6} k' \sigma^3 + R_{32}.$$

При достаточно малых σ знак этой координаты определяется приближенной формулой

$$y \approx \frac{1}{3} k \sigma^2.$$

Так как $k > 0$, а σ входит только в квадрате, то знак координаты y не меняется при перемене знака σ , т. е. $y \geq 0$. Следовательно, все близкие точки кривой расположены с одной и той же стороны от спрямляющей плоскости xOz , определяемой векторами \bar{e}_1 и \bar{e}_3 . Кстати, теперь выясняется и последняя мелочь в геометрической характеристике векторов репера: вектор \bar{e}_2 ориентирован в ту сторону от спрямляющей плоскости, где находится кривая (точнее, ее близкие точки: ведь только для них $y \geq 0$).

Теперь перейдем к утверждению Гильберта о расположении кривой относительно соприкасающейся плоскости $z = 0$, т. е. плоскости, определяемой векторами \bar{e}_1 и \bar{e}_2 . Для этого надо рассмотреть третью координату близкой точки M_1 :

$$z = \frac{1}{6} k \kappa \sigma^3 + R_{33}$$

или приближенно

$$z \approx \frac{1}{6} k \kappa \sigma^3. \quad (5.11)$$

Так как k и κ являются функциями от s , то при изменении σ они остаются фиксированными. Значит, изменение знака z может произойти только при изменении знака σ . Этим результат Гильберта полностью доказан: кривая переходит с одной стороны соприкасающейся плоскости на другую. Дифференциалы помогли!

Мы подошли к завершению четвертого пункта плана, изложенного в начале главы. Осталось лишь выяснить геометрический смысл знака кручения κ . Этот вопрос

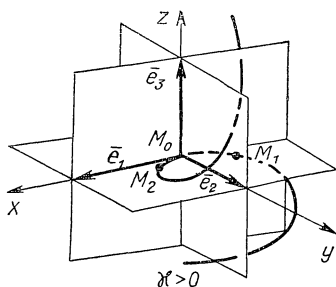


Рис. 38

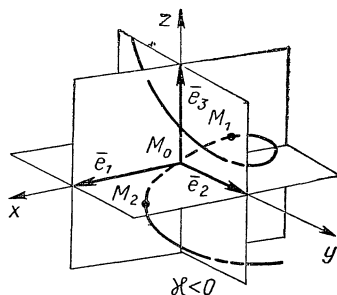


Рис. 39

решается рассмотрением поведения кусочка кривой относительно канонического репера, построенного в одной из внутренних точек M_0 этого кусочка. Мы приведем теперь и соответствующие рисунки, чего нам не удавалось сделать в четвертой главе.

Возьмем на кривой три точки. Точка M_0 — начало репера, для нее $\sigma = 0$. Точка M_1 расположена до начала, для нее $\sigma < 0$. Точка M_2 расположена после начала, для нее $\sigma > 0$. Как зависит расположение этих точек от знака κ ?

При $\kappa > 0$ в силу (5.11) в точке M_1 будет $z_1 < 0$, в точке M_0 будет $z_0 = 0$ и в точке M_2 будет $z_2 > 0$. Учитывая сказанное ранее относительно координат x и y , получаем картину, изображенную на рисунке 38. Конечно, векторы $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ по-прежнему образуют правую тройку.

При возрастании σ кривая переходит «снизу вверх» («верхом» мы считаем положительное направление оси z , т. е. направление вектора \bar{e}_3). При этом кривая касается оси x и спрямляющей плоскости $y = 0$, оставаясь от нее с одной стороны.

Если же $\kappa < 0$, то в точке M_1 будет $z_1 > 0$, в точке M_0 будет $z_0 = 0$ и в точке M_2 будет $z_2 < 0$. Этому соответствует рисунок 39. При возрастании σ кривая идет «сверху вниз», по-прежнему касаясь оси x и плоскости $y = 0$.

Теперь понятно, в чем смысл знака кручения. Он показывает, как «закручивается» кривая относительно канонического репера — по часовой стрелке или против ее хода (напомним, что касательная ориентирована в сторону возрастания σ , т. е. мы двигаемся по кривой в направле-

нии \bar{e}_1). Это различие хорошо известно в природе и технике. Например, стебли батата закручиваются, как на рисунке 40, т. е. имеют положительное кручение, а стебли хмеля — как на рисунке 41, т. е. имеют отрицательное кручение. В технике со знаком кручения связано различие «правой» и «левой» нарезки винтов, — об этом мы расскажем в следующей главе.

Подчеркнем еще раз, что описанная геометрическая картина имеет место в *любой* точке *любой* кривой, заданной функцией $\bar{r} = \bar{r}(s)$, удовлетворяющей известным ограничениям. Столь общую картину нельзя получить средствами аналитической геометрии, аппаратом которой является элементарная алгебра. Здесь помогают только дифференциалы.

Разумеется, мы исследовали кривую не очень глубоко: в формуле (5.8) фигурирует только третья степень σ , а о векторе \bar{R}_3 мы знаем лишь, что он достаточно мал при малых σ . Но деривационные формулы дают возможность углублять исследование, надо только не лениться дифференцировать и тем самым находить приближения для \bar{R}_3 , \bar{R}_4 и т. д. Можно представить себе продолжение этого процесса до бесконечности, т. е. представить, что вместо конечной суммы вида (5.8) записана бесконечная. Такие суммы называются *рядами*. Идея получения рядов из-

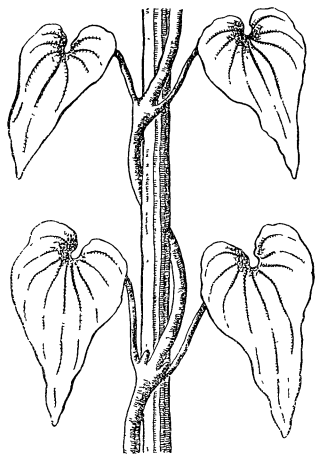


Рис. 40

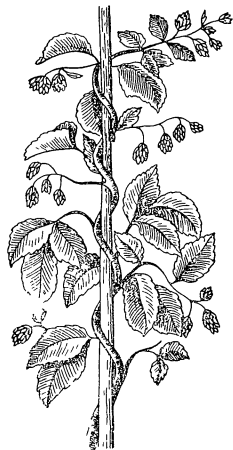


Рис. 41

вестна читателю из школьного курса математики — там изучается, например, бесконечная геометрическая прогрессия. От нее остается один шаг до понятия ряда. В случае, когда сумма членов ряда при бесконечном возрастании числа слагаемых имеет предел, говорят, что ряд *сходится*, а представляемая им функция называется *аналитической*. Естественно, что и кривую, которую можно задать аналитической вектор-функцией, называют *аналитической*.

Аналитическая кривая полностью — вплоть до положения в пространстве — определяется заданием функций

$$k = k(s), \quad \kappa = \kappa(s), \quad (5.12)$$

где s — длина дуги, k — кривизна, κ — кручение.

В самом деле, зная эти функции, мы можем написать весь вышеупомянутый ряд, т. е. найти функцию $\bar{\rho} = \bar{\rho}(\sigma)$, которая дает обычное уравнение кривой относительно неподвижной системы координат, являющейся каноническим репером в точке $\sigma = 0$. Остается поместить этот репер куда угодно, — эту возможность и означают слова «вплоть до положения в пространстве».

Таким образом, задание кривой уравнениями (5.12) является предельно «геометричным»: в него входят только геометрически определенные инварианты кривой. Уравнения относительно s , k и κ принято называть *натуральными* или *естественными*, ибо они свободны от всякого произвола исследователя: в них не фигурируют ни неподвижная система координат, ни «параметризация», т. е. случайно выбранное независимое переменное t , которое мы заменили на инвариантную длину дуги.

Теперь можно было бы приступить к выполнению последнего пункта плана, т. е. к классификации кривых по наиболее простым натуральным уравнениям. Однако предварительно надо решить такую задачу: по обычному уравнению кривой, т. е. по функции $\bar{r} = \bar{r}(t)$, найти инварианты s , k , κ и натуральное уравнение кривой.

Чтобы приступить к решению этой задачи, получим формулы для вычисления инвариантов. Первый инвариант — длину дуги s — мы уже умеем находить:

$$s = \int_{t_0}^t |\bar{r}'(t)| dt. \quad (5.13)$$

Для отыскания остальных двух инвариантов — функций $k(s)$ и $\kappa(s)$ — понадобятся только деривационные формулы и правила дифференцирования, прежде всего правило дифференцирования сложной функции.

Вычислим кривизну k . Сначала рассмотрим случай, когда кривая задана как функция длины своей дуги, т. е. уравнением $\bar{r} = \bar{r}(s)$. Тогда при помощи деривационных формул легко найти $\frac{d\bar{r}}{ds}$, $\frac{d^2\bar{r}}{ds^2}$ и т. д., например:

$$\frac{d\bar{r}}{ds} = \bar{e}_1, \quad \frac{d^2\bar{r}}{ds^2} = \frac{d\bar{e}_1}{ds} = k\bar{e}_2. \quad (5.14)$$

Из этих уравнений кривизну k можно найти следующим путем. Составим векторное произведение левых и правых частей равенств (5.14) и, пользуясь таблицей (2.22), подвергнем правую часть несложным преобразованиям:

$$\frac{d\bar{r}}{ds} \times \frac{d^2\bar{r}}{ds^2} = \bar{e}_1 \times k\bar{e}_2 = k(\bar{e}_1 \times \bar{e}_2) = k\bar{e}_3.$$

Так как $k > 0$ и $|\bar{e}_3| = 1$, то, взяв модули первого и последнего выражений, получим:

$$\left| \frac{d\bar{r}}{ds} \times \frac{d^2\bar{r}}{ds^2} \right| = k. \quad (5.15)$$

Итак, если параметром является длина дуги, то кривизна найдена. Можно найти k и для случая, когда уравнение кривой задано в самом общем виде как функция произвольного параметра t . Так как $t = t(s)$, то уравнение кривой можно написать в виде $\bar{r} = \bar{r}(t(s))$. Это дает возможность в формуле (5.15) перейти от производных по s к производным по t . По правилу дифференцирования сложной функции (см. гл. III) имеем (штрихи означают производные по t):

$$\frac{d\bar{r}}{ds} = \frac{d\bar{r}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \bar{r}' \cdot \frac{dt}{ds}. \quad (5.16)$$

Так как $\left| \frac{d\bar{r}}{ds} \right| = 1$, то

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{|\bar{r}'|}. \quad (5.17)$$

Дифференцируя (5.16) по s и исключая $\frac{ar}{ds}$ при помощи (5.17), получаем¹:

$$k = \frac{|\bar{r}' \times \bar{r}''|}{|\bar{r}'|^3} \quad (5.18)$$

Эта компактная формула дает возможность вычислять кривизну при любом задании кривой (мы потом покажем на примерах, как это делается).

Теперь наша задача — получить хорошую формулу и для кручения. Действовать будем почти по аналогии. Иначе говоря, положим сначала, что кривая задана вектор-функцией своей дуги. В выражениях (5.14) для первой и второй производных кручение не участвует. Подсчитаем третью производную:

$$\begin{aligned} \frac{d^3 \bar{r}}{ds^3} &= \frac{d(k\bar{e}_2)}{ds} = \frac{dk}{ds} \bar{e}_2 + k \frac{d\bar{e}_2}{ds} = \\ &= \frac{dk}{ds} \bar{e}_2 + k(-k\bar{e}_1 + \kappa \bar{e}_3) = -k^2 \bar{e}_1 + \frac{dk}{ds} \bar{e}_2 + k\kappa \bar{e}_3. \end{aligned}$$

В полученном выражении кручение κ уже участвует и можно попытаться найти его, составляя смешанное произведение (см. гл. II, § 5) трех производных:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{r}}{ds} \cdot \frac{d^2 \bar{r}}{ds^2} \cdot \frac{d^3 \bar{r}}{ds^3} &= \bar{e}_1 \cdot k\bar{e}_2 \cdot \left(-k^2 \bar{e}_1 + \frac{dk}{ds} \bar{e}_2 + k\kappa \bar{e}_3 \right) = \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ -k^2 & \frac{dk}{ds} & k\kappa \end{vmatrix} = k^2 \kappa. \end{aligned}$$

Отсюда (напомним, что $k \neq 0$)

$$\kappa = \frac{1}{k^2} \left(\frac{d\bar{r}}{ds} \cdot \frac{d^2 \bar{r}}{ds^2} \cdot \frac{d^3 \bar{r}}{ds^3} \right). \quad (5.19)$$

Для $\bar{r} = \bar{r}(t)$ получится (выкладку мы вновь опускаем):

$$\kappa = \frac{|\bar{r}' \cdot \bar{r}'' \cdot \bar{r}'''}{|\bar{r}' \times \bar{r}''|^2}. \quad (5.20)$$

¹ Подробности этой выкладки мы опускаем, но читателю, который, кроме знаний, хочет получить еще и навыки, рекомендуем выполнить ее самостоятельно.

Формулы (5.13), (5.18) и (5.20) называют вычислительными, так как они дают возможность получить числовое значение инвариантов s , k и κ для любой точки кривой. Все эти формулы очень просты и изящны, и если применять их достаточно часто, то они так же хорошо запоминаются, как и многие формулы школьной математики. Заметим, что их изящество обеспечено применением векторного исчисления. Стоит только вообразить себе, что входящие в (5.18) и (5.20) произведения представлены через $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$, и изящество исчезнет. Но ведь для чего-то существуют векторы!

Рассмотрение вычислительных формул показывает, что все полученные результаты имеют смысл только в точках, где выполнены условия существования производных, а также условия

$$\vec{r}' \neq 0, \quad \vec{r}' \times \vec{r}'' \neq 0. \quad (5.21)$$

В конкретных случаях отдельные точки, в которых эти условия нарушены, называются *особыми*.

Мы закончили осуществление первых четырех пунктов плана исследования кривых. Пятый пункт плана имеет значение только для поверхностей и более сложных геометрических образов, а для кривых он не нужен, так как функции $k(s)$ и $\kappa(s)$ для произвольной кривой никакими соотношениями не связаны. Следовательно, мы можем перейти к последнему пункту, т. е. исследовать некоторые конкретные кривые.

ОТ ВИНТОВОЙ ЛИНИИ—К ТРАКТРИСЕ

Выполнение последнего пункта плана исследования кривых мы начнем с рассмотрения уже известной нам (гл. II, § 6) винтовой линии. Найдем ее натуральное уравнение. Ее уравнение относительно неподвижной системы координат имеет вид (2.32):

$$\bar{r}(t) = a\bar{e}t + b\bar{t}\bar{k}, \quad a > 0, \quad b > 0,$$

или подробнее

$$\bar{r}(t) = a \cos t\bar{i} + a \sin t\bar{j} + b\bar{t}\bar{k}, \quad a > 0, \quad b > 0.$$

Вычислим кривизну и кручение этой кривой в какой-либо точке. Для этого нам понадобятся три производные:

$$\bar{r}'(t) = -a \sin t\bar{i} + a \cos t\bar{j} + b\bar{k} = a\bar{e}' + b\bar{k},$$

$$\bar{r}''(t) = -a \cos t\bar{i} - a \sin t\bar{j} = -a\bar{e},$$

$$\bar{r}'''(t) = a \sin t\bar{i} - a \cos t\bar{j} = -a\bar{e}'.$$

Заметим попутно, что из только что полученных формул следует важное заключение о производных функции \bar{e} (см. рис. 42):

$$\bar{e}'(t) = \bar{e}\left(t + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\bar{e}''(t) = -\bar{e}, \quad (6.1)$$

$$\bar{e}'''(t) = -\bar{e}'.$$

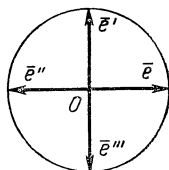


Рис. 42

Эти формулы мы сейчас же будем использовать. Заметим еще, что $\bar{e} \perp \bar{e}'$. Кроме того, \bar{e} и \bar{e}' лежат в плоскости векторов \bar{i}, \bar{j} , а следовательно, $\bar{e} \perp \bar{k}, \bar{e}' \perp \bar{k}$. В итоге векторы \bar{e}, \bar{e}' и \bar{k} всегда образуют декартов базис.

Теперь вычислим векторное произведение

$$\bar{r}' \times \bar{r}'' = \begin{vmatrix} \bar{e} & \bar{e}' & \bar{k} \\ 0 & a & b \\ -a & 0 & 0 \end{vmatrix} = -abe' + a^2\bar{k},$$

смешанное произведение

$$\bar{r}' \cdot \bar{r}'' \cdot \bar{r}''' = (\bar{r}' \times \bar{r}'') \cdot \bar{r}''' = (-abe' + a^2\bar{k}) \cdot (-a\bar{e}') = a^2b$$

и модули

$$|\bar{r}'| = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$|\bar{r}' \times \bar{r}''| = \sqrt{a^2b^2 + a^4} = a\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Проверим, выполняются ли те условия, которым должны удовлетворять рассматриваемые точки кривой (см. гл. IV). Дифференцирование функций \bar{r}, \bar{r}' и \bar{r}'' не вызвало каких-либо затруднений, все эти функции существуют, и, таким образом, первое условие выполнено. Далее требуется, чтобы $\bar{r}' \neq 0$, $\bar{r}' \times \bar{r}'' \neq 0$, но это так и есть, ибо $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a^2 + b^2 \neq 0$. Имеем полное право исследовать кривую при любом t !

Подставим результаты в формулы (5.18) и (5.20):

$$k = \frac{a\sqrt{a^2 + b^2}}{(a^2 + b^2)\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad (6.2)$$

$$\kappa = \frac{a^2b}{a^2(a^2 + b^2)} = \frac{b}{a^2 + b^2} \quad (6.3)$$

Приятная неожиданность: во всех точках винтовой линии кривизна и кручение постоянны, так как правые части формул (6.2), (6.3) не содержат t ! Попросту говоря, это означает, что винтовая линия во всех точках устроена совершенно одинаково. Именно поэтому она может двигаться сама по себе, может «винтиться». Вот на чем основано известное с древних времен использование винта в технике.

Итак, мы нашли натуральные уравнения винтовой линии:

$$k = \text{const}, \quad \kappa = \text{const}. \quad (6.4)$$

Заметим, что, вообще говоря, мы получаем не одну винтовую линию, а бесконечное множество: каждой паре значений констант a и b соответствует одна линия с определенным значением радиуса цилиндра и шага винтовой линии.

Вернемся к примерам 2 и 3 § 6 второй главы. При $b = 0$ винтовая линия превращается в окружность. Значит, окружность имеет нулевое кручение, а кривизна ее равна $\frac{1}{a}$. Не удивительно, что и окружность может двигаться сама по себе. Заметим еще, что для окружности кривизна есть величина, обратная радиусу.

На примере винтовой линии можно еще более наглядно уяснить геометрическое различие между положительным и отрицательным кручением (см. с. 86). Знак кручения совпадает со знаком шага $h = 2\pi b$. При вращении по часовой стрелке и положительном шаге происходит подъем. Если знак шага сохранить, но изменить направление вращения винта, то он пойдет вниз, т. е. в зависимости от направления вращения винта он будет или закручиваться, или вывинчиваться. Но при отрицательном шаге винт будет двигаться в противоположном направлении («левая резьба»).

Попытаемся немного обобщить уравнения (6.4). Пусть постоянным будет только отношение инвариантов $\frac{\kappa}{k}$, а не сами инварианты, т. е. рассмотрим натуральные уравнения

$$k = k(s), \quad \kappa = Ak, \quad (6.5)$$

где A — постоянное число, k — некоторая функция длины дуги. Конечно, уравнения (6.5) определяют не одну кривую, а бесконечное их множество, зависящее от функции $k = k(s)$.

Значит, искать придется не одну прямую, а бесконечное их множество. Уравнение $\kappa = Ak$ похоже на уравнение прямой пропорциональности $y = ax$; любой школьник знает, что a удобно рассматривать как угловой коэффициент, численно равный тангенсу угла наклона пря-

мой к оси абсцисс. Аналогия здесь очень отдаленная, да и не совсем точная, но она довольно скоро приведет нас к цели. Итак, пусть A — тригонометрическая функция угла, но не тангенс, а котангенс, т. е. пусть

$$A = \operatorname{ctg} \alpha, \quad \alpha \neq 0$$

(общность рассуждений от этого не нарушится, ибо $\operatorname{ctg} \alpha$ может принимать любые значения, необходимо лишь ограничение $\alpha \neq 0$, так как при $\alpha = 0$ значение котангенса не определено). Теперь (6.5) можно записать так:

$$k \cos \alpha - \kappa \sin \alpha = 0.$$

Выпишем две из формул Френе:

$$\frac{d\bar{e}_1}{ds} = k\bar{e}_2,$$

$$\frac{d\bar{e}_3}{ds} = -\kappa\bar{e}_2.$$

Умножив первую на $\cos \alpha$, а вторую на $\sin \alpha$ и затем сложив их, получим, что для нашей линии

$$\cos \alpha \frac{d\bar{e}_1}{ds} + \sin \alpha \frac{d\bar{e}_3}{ds} = 0,$$

или

$$\frac{d}{ds} (\bar{e}_1 \cos \alpha + \bar{e}_3 \sin \alpha) = 0.$$

Это значит, что вектор

$$\bar{m} = \bar{e}_1 \cos \alpha + \bar{e}_3 \sin \alpha$$

постоянен, т. е. от s не зависит. Отсюда следует (надо помножить правую и левую части равенства на вектор \bar{e}_1 и воспользоваться таблицей (2.13)):

$$\bar{m} \cdot \bar{e}_1 = \cos \alpha,$$

т. е. касательная к кривой в *любой* точке образует постоянный угол α с постоянным вектором \bar{m} . Это очень просто представить себе чисто геометрически. Через каждую точку исследуемой кривой проведем прямые, параллельные вектору \bar{m} . Получится цилиндрическая

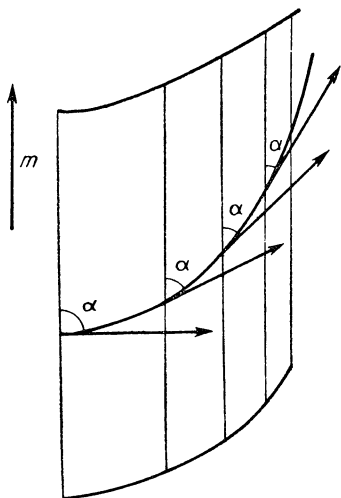


Рис. 43

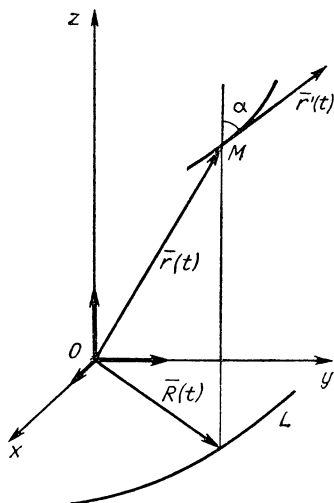


Рис. 44

поверхность (рис. 43). При этом окажется, что кривая пересекает все образующие под одним и тем же углом α , т. е., как говорят механики, является их изогональной¹ траекторией.

Теперь уже нетрудно догадаться, как получить координатные уравнения искомой линии. Возьмем произвольную плоскую кривую L в качестве направляющей цилиндра, образующие которого будем считать параллельными оси Oz (т. е. положим $\vec{m} \uparrow \vec{k}$). Запишем уравнение кривой L в координатах $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = 0$ или векторно $\vec{R} = \vec{R}(t)$ (см. рис. 44). Тогда радиус-вектор точки M искомой линии представится в виде

$$\vec{r} = \vec{R}(t) + z(t) \vec{k}.$$

Касательная в точке M параллельна вектору

$$\vec{r}' = \vec{R}'(t) + z'(t) \vec{k}.$$

¹ Как известно, корень «гоно» означает «угол», а «изо» — «одинаковый». Следовательно, «изогональный» означает «образующий один и тот же угол».

Угол α между касательной и вектором \bar{k} должен быть постоянным. Имеем:

$$\bar{r}' \cdot \bar{k} = |\bar{r}'| \cos \alpha. \quad (6.6)$$

Отнесем кривую $\bar{r} = \bar{r}(t)$ к ее длине дуги, т. е. заменим переменную t на s так, чтобы $\left| \frac{d\bar{r}}{ds} \right| = 1$. Тогда формула (6.6) примет вид:

$$\frac{d\bar{r}}{ds} \cdot \bar{k} = \cos \alpha.$$

Но вспомните (2.6):

$$\frac{d\bar{r}}{ds} = \frac{dx}{ds} \bar{i} + \frac{dy}{ds} \bar{j} + \frac{dz}{ds} \bar{k}.$$

Поэтому

$$\frac{dz}{ds} = \frac{d\bar{r}}{ds} \cdot \bar{k} = \cos \alpha.$$

Так как α — постоянное число, то в соответствии с правилами интегрирования, получим:

$$z = \cos \alpha \cdot s + C,$$

где C — постоянная интегрирования.

Теперь получается векторное уравнение искомой линии:

$$\bar{r} = x(s) \bar{i} + y(s) \bar{j} + (\cos \alpha \cdot s + C) \bar{k}. \quad (6.7)$$

Хотя формально здесь присутствуют две произвольные функции: $x(s)$ и $y(s)$, но они связаны условием, вытекающим из равенства

$$\left| \frac{d\bar{r}}{ds} \right| = 1.$$

Это условие имеет вид:

$$\left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 + \cos^2 \alpha = 1,$$

или

$$\left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 = \sin^2 \alpha,$$

так что в действительности произвольной является лишь одна из функций: $x(s)$ или $y(s)$.

Линия (6.7) называется *линией откоса*. Так как и кручение, и кривизна винтовой линии постоянны, то

постоянно и их отношение $\frac{b}{a}$. Значит, эта линия тоже является линией откоса. Это ясно еще и из того, что винтовая линия пересекает образующие цилиндра под одним и тем же углом.

Несколько более сложный, но очень часто встречающийся пример линии откоса — коническая винтовая линия (рис. 45). Ее уравнение

$$\vec{r}(t) = e^{mt} \cos \bar{t} \vec{i} + e^{mt} \sin \bar{t} \vec{j} + e^{mt} \operatorname{ctg} \alpha \bar{k},$$

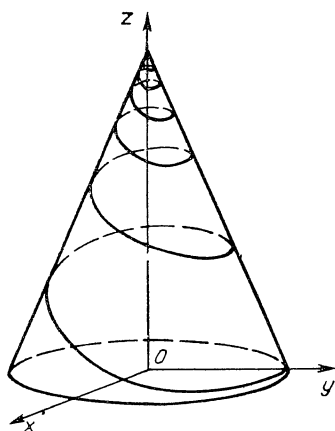


Рис. 45

где α — угол между осью конуса и его образующей, $m = \frac{\sin \alpha}{\operatorname{tg} \varphi}$, φ — угол между касательной к конической винтовой линии и образующей конуса. Так как угол φ постоянен, то и эта линия легко «винтится» (в данном

случае лучше сказать «ввинчивается»), но уже не сама по себе, а так, что новый виток как бы идет по следу предыдущих. Это свойство используется в таком нехитром приспособлении, как штопор, и, разумеется, во многих винтах (рис. 46), буравах и т. д. Обратите внимание, что проекция конической винтовой линии на плоскость xOy есть так называемая логарифмическая спираль. Если через точки этой спирали провести прямые, параллельные оси Oz , то они будут пересекать нашу линию тоже под постоянным углом, откуда и следует, что коническая винтовая линия есть линия откоса. О конической винтовой линии можно рассказать еще немало, но мы хотим привлечь внимание читателя только на одно интересное обстоятельство. Задумайтесь над удивительным фактом: сколько, ока-

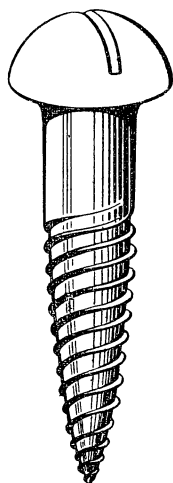


Рис. 46

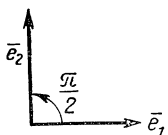


Рис. 47

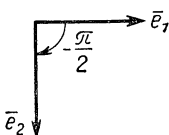


Рис. 48

зывается, любопытного и содержательного можно обнаружить в обыкновенном винте!

Рассмотрим теперь линии $\kappa = 0$. Как мы уже отмечали, это плоские линии. Обратимся к формулам Френе (4.11). В первых двух из них кручение не участвует вообще. В третьей, так как $\kappa = 0$, второе слагаемое обращается в нуль. А в четвертой вся правая часть обращается в нуль, что означает постоянство вектора \bar{e}_3 вдоль всей кривой: он перпендикулярен плоскости, в которой лежит кривая. Итак, для плоской кривой формулы Френе принимают вид:

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{r}}{ds} &= \bar{e}_1, \\ \frac{d\bar{e}_1}{ds} &= k(s) \bar{e}_2, \\ \frac{d\bar{e}_2}{ds} &= -k(s) \bar{e}_1.\end{aligned}\tag{6.8}$$

При геометрическом истолковании этих формул следует учесть одну тонкость. В планиметрии ориентация второго вектора репера \bar{e}_2 определена, как только определена ориентация первого \bar{e}_1 : вектор \bar{e}_2 должен полу-

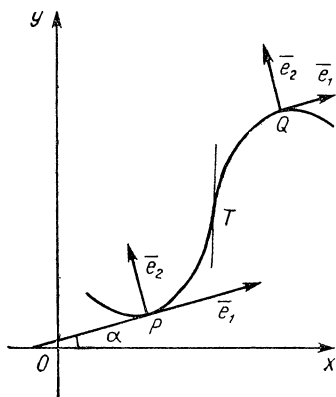


Рис. 49

чаться поворотом \bar{e}_1 на 90° против часовой стрелки (рис. 47), что соответствует общепринятому устройству декартовой системы координат. Впрочем, если бы мы построили систему координат по другому (по часовой стрелке, как на рис. 48), то все равно ориентация вектора \bar{e}_2 определялась бы однозначно. Поэтому в формулах (6.8) мы не можем требовать, чтобы было $k > 0$. Возникает такая картина (рис. 49): в одних точках (например, в точке P) вектор \bar{e}_2

«смотрит» в ту сторону, где лежат ближайшие точки кривой (т. е. так, как это и было для пространственных кривых), а в других (например, в точке Q) он «смотрит» в другую сторону.

Очевидно, указанная тонкость должна проявиться и в вычислительных формулах. Посмотрим. Для вычисления длины дуги сохраняется прежняя формула:

$$s = \int_{t_0}^t |\vec{r}'(t)| dt,$$

так как в ней кривизна никак не участвует. А вот формулу (5.18) для вычисления самой кривизны придется уточнить: ведь в числителе стоит векторное произведение, а оно применяется только в стереометрии!

Если, применяя формулу (2.24) при $z_1 = z_2 = 0$, вычислить векторное произведение векторов $\vec{a} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j}$ и $\vec{b} = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j}$, то получится:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k}.$$

Но в планиметрии вектора \vec{k} нет, поэтому вместо векторного произведения употребляют «косое»:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} \stackrel{def}{=} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}, \quad (6.9)$$

т. е. двум векторам ставят в соответствие число, равное определителю, составленному из их координат (символ $\stackrel{def}{=}$ означает «по определению»). Тогда формула (5.18) примет вид:

$$k(t) = \frac{\vec{r}' \wedge \vec{r}''}{|\vec{r}'|^3}, \quad (6.10)$$

где штрихи, разумеется, означают дифференцирование по произвольному параметру t .

Формула (6.10) показывает, что кривизна плоской кривой может быть положительной, отрицательной и даже обращаться в нуль. Что это означает геометрически? Вернемся к рисунку 49 и введем в рассмотрение угол $\alpha = \widehat{(\vec{i}, \vec{e}_1)}$, т. е. угол, образуемый касательной с осью абсцисс. Тогда

$$\frac{d\bar{r}}{ds} = \bar{e}_1 = \cos \alpha \bar{i} + \sin \alpha \bar{j},$$

$$\frac{d^2 \bar{r}}{ds^2} = \frac{d\bar{e}_1}{ds} = (-\sin \alpha \bar{i} + \cos \alpha \bar{j}) \frac{d\alpha}{ds}.$$

Формула (6.10) дает:

$$k(s) = \left| \begin{array}{cc} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha \frac{d\alpha}{ds} & \cos \alpha \frac{d\alpha}{ds} \end{array} \right| = \frac{d\alpha}{ds}.$$

Итак, кривизна плоской кривой есть производная угла α по длине дуги s :

$$k = \frac{d\alpha}{ds}. \quad (6.11)$$

Значит, она положительна там, где угол α с возрастанием длины дуги s увеличивается (точка P на рис. 49), и отрицательна там, где угол α уменьшается (точка Q). В силу непрерывности функции $k(s)$ где-то «по дороге» она обязана обратиться в нуль. Такие точки называются *точками перегиба* (точка T на том же рисунке). В них кривая переходит с одной стороны касательной на другую, что устанавливается так же, как и при исследовании поведения пространственной кривой относительно соприкасающейся плоскости. В школьном курсе математики обычно не говорят о точках перегиба, но на обложке книги «Алгебра, 9—10» такая точка показана. Для изображенной там тангенсоиды ею служит начало координат, касательной в этой точке является биссектриса координатного угла.

Теперь перейдем к примерам.

1. *Окружность* радиуса a . Уравнение этой окружности (см. (2.31)):

$$\bar{r}(t) = a\bar{e}(t).$$

Найдем производные (см. (6.1)):

$$\begin{aligned} \bar{r}'(t) &= a\bar{e}'(t), \\ \bar{r}''(t) &= -a\bar{e}(t). \end{aligned}$$

В базисе \bar{e}, \bar{e}' вычислим косое произведение (см. (6.9)):

$$\bar{r}' \wedge \bar{r}'' = \begin{vmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{vmatrix} = a^2.$$

Очевидно, что

$$|\bar{r}'| = a.$$

Итак, для окружности, в силу (6.10),

$$k(t) = \frac{a^2}{a^3} = \frac{1}{a}. \quad (6.12)$$

Мы, естественно, получили тот же результат, что и в предыдущей главе, — кривизна окружности есть величина постоянная и обратная радиусу. Из (6.12) следует, что, чем больше радиус окружности, тем меньше кривизна, т. е. тем медленнее вращается касательная. Это вполне соответствует наглядным представлениям: на рисунке 50 — небольшой радиус, большая кривизна; на рисунке 51 — радиус велик, кривизна мала.



Рис. 50

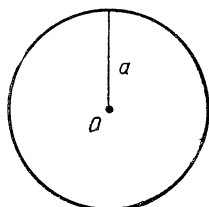


Рис. 51

Уравнение (6.12) можно записать в виде:

$$k = \frac{1}{a} = \text{const}$$

(без указания на параметры t или s : ведь кривизна k от них не зависит). Это и есть натуральное уравнение окружности. Задача решена (второй инвариант — кручение — равен нулю).

С окружностью все оказалось довольно просто. В качестве следующих примеров можно было бы взять эллипс, гиперболу, параболу, но они достаточно известны и хорошо изучены элементарными средствами. Мы рассмотрим два других примера, второй из которых встретится нам еще раз и окажется весьма важным. Впрочем, читатель, не любящий выкладки, может опустить эти примеры при первом чтении.

2. *Циклоида*. Еще в XV в. выдающийся немецкий ученый-гуманист Николай Кузанский (1401—1464), наблюдая за перемещением гвоздя, вбитого в колесо движущегося экипажа, задумался над описываемой им траекторией. Нетрудно сообразить, что форма этой траектории будет зависеть прежде всего от места, где вбит гвоздик. Простейший случай — кривая, по которой движется фиксированная точка окружности, когда сама окружность равномерно катится по прямой (гвоздик вбит в обод, рис. 52). Великий Галилей (1564—1642) назвал такую кривую *циклоидой* (от греческих *κυκλος* — круг и *ειδος* — вид). Если точка лежит не на окружности,

а внутри круга, то получается «укороченная» циклоида (рис. 53). Если же фиксированная точка лежит вне круга, но вращается вместе с ним, то получается «удлиненная» циклоида (рис. 54). Можно изменить направляющую и покатыть окружность внутри или вне другой окружности. В первом случае получится гипоциклоида, во втором — эпициклоида. Конечно, и они могут быть укороченными или удлиненными. Так как и обыкновенная циклоида, и все ее обобщения описывают соединение двух простейших механических движений (прямолинейного и вращательного или двух вращательных), то становится понятной роль этих кривых в теории механизмов и в небесной механике.

В частности, еще задолго до Николая Кузанского и Галилея Клавдий Птолемей (см. гл. I) фактически при-

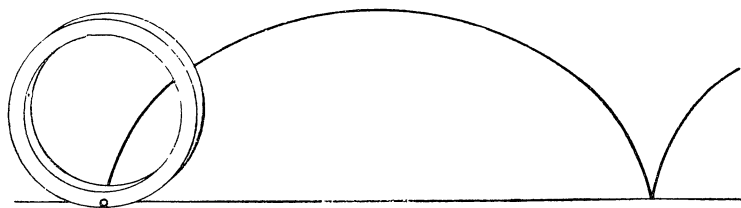


Рис. 52

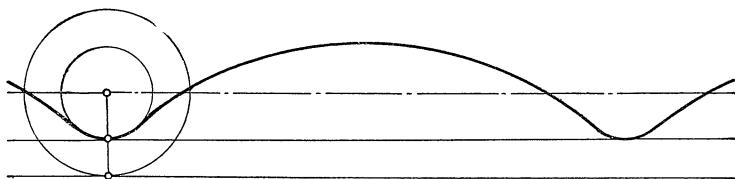


Рис. 53

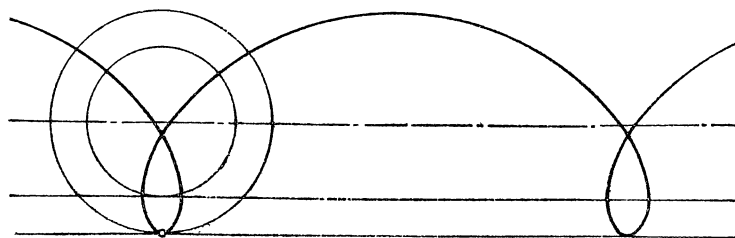


Рис. 54

менил в «Альмагесте» эпициклоиду. Птолеме́й считал, что Земля является центром Вселенной, а все планеты вращаются вокруг этого центра. В этом — основная идея системы Птолемея, о ней обычно рассказывают еще в школе. Но само устройство системы весьма не просто. По Птолемею, планеты (кроме Солнца и Луны) движутся по небольшим окружностям — «эпициклам», центры же

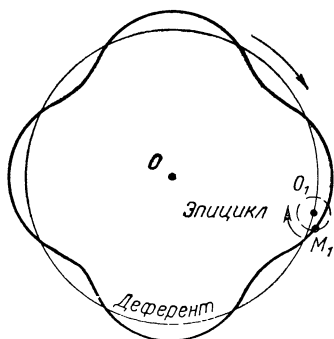


Рис. 55

эпициклов движутся равномерно по «деферентам», — этим словом Птолемей называл окружности, центром которых служит центр неподвижной Земли. С нашей точки зрения, деференты есть направляющие для эпициклов (см. рис. 55). Тщательно подобрав радиусы деферентов и эпициклов, Птолемей добился хорошего соответствия своей теории с данными наблюдений и получил возможность предвычислять положение планет, предсказывать затмения и т. д. Это качество позволило системе Птолемея просуществовать без малого полторы тысячи лет. Даже поддержка всесильной церкви не обеспечила бы ей такой жизнеспособности, если бы система Птолемея не служила так хорошо астрономам и мореплавателям. Тем не менее неудачный выбор центра заставил Птолемея построить в «Альмагесте» столь сложную картину мироздания, что пораженный ею король Кастилии Альфонс Мудрый, говорят, воскликнул: «Будь я при господе боге, когда он творил мир, я посоветовал бы устроить его попроще!» Король жил задолго до Коперника, Кеплера и Ньютона, из учения которых искомая простота — гелиоцентрическая система мира с движением планет по эллипсам — получается без помощи бога и советов королей. Заметим, однако, что для наблюдательной астрономии геометрические построения Птолемея сохраняют значение и в наши дни.

Но в XVII в. интерес к циклоиде не был связан ни с Птолемеевой системой, ни вообще с астрономией. Задача о вычислении площади одной арки циклоиды, поставленная Галилеем, как и задача о проведении касательной

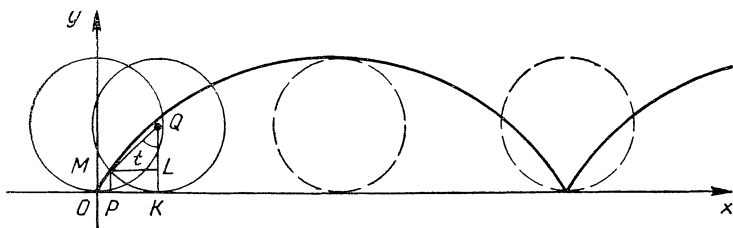


Рис. 56

к циклоиде, оказались чрезвычайно популярными среди математиков того времени: на них они испытывали силу методов математического анализа. Циклоидой занимались Декарт и Ферма, а также хорошо известный читателю из курса физики Эванжелиста Торричелли (1608—1647) и ученик Галилея Винченцо Вивiani (1622—1703). Попробуем и мы испытать на ней силу векторного исчисления и дифференциалов.

Примем для простоты радиус окружности за единицу. Пусть окружность катится по оси абсцисс (рис. 56), а интересующая нас точка M (гвоздик Николая Кузанского) в начальный момент находится в начале координат. За параметр t примем измеряемый в радианах угол, на который поворачивается радиус окружности, проведенный в точку M (при $t = 0$ точка M , как мы договорились, совпадает с началом координат). Дуга KM численно равна величине угла t , а также отрезку OK . Кроме того, $PK = \sin t$, а $LQ = \cos t$. Поэтому

$$\begin{aligned} x &= OP = OK - PK = t - \sin t, \\ y &= PM = KL = QK - QL = 1 - \cos t. \end{aligned}$$

Теперь можно записать уравнение циклоиды в векторном виде:

$$\vec{r} = (t - \sin t) \vec{i} + (1 - \cos t) \vec{j}.$$

Считаем производные:

$$\begin{aligned} \vec{r}' &= (1 - \cos t) \vec{i} + \sin t \vec{j}, \\ \vec{r}'' &= \sin t \vec{i} + \cos t \vec{j}. \end{aligned}$$

Сразу видно, что при $t = 0$ первая производная обращается в нуль, т. е. эта точка особая (см. конец предыдущей главы). Ее надо «исключить из рассмотрения». Придется также исключить и точки, для которых $t = 2n\pi$, где n — любое целое число. Ограничимся куском (ар-



Рис. 57

кой) циклоиды, соответствующим значениям t , заключенным между 0 и 2π , т. е. будем считать

$$0 < t < 2\pi.$$

При $t = \pi$ имеем: $y = 2$; следовательно, «гвоздик» оказался «наверху», затем он опять пойдет вниз. Далее арки повторяются для интервалов $2\pi < t < 4\pi$, $4\pi < t < 6\pi$, В концевых точках интервалов имеем особую ситуацию: в каждой из них сходятся две ветви с общей касательной, — такие особые точки называются *точками возврата* (рис. 57). Для отрицательных t картина повторится симметрично относительно оси ординат.

Пока мы обходились без дифференциалов. Но мы и не ушли дальше Галилея. Попробуем теперь найти натуральные уравнения, т. е. найти связь между длиной дуги и кривизной (кручение равно нулю, так как кривая плоская).

Для длины дуги имеем:

$$\begin{aligned} s &= \int_{t_0}^t |r'(t)| dt = \int_{t_0}^t \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} dt = \\ &= \int_{t_0}^t \sqrt{2(1 - \cos t)} dt. \end{aligned}$$

Под знаком интеграла стоит «неудобное» выражение. Воспользуемся известной формулой:

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}.$$

Если положить в ней $\alpha = \frac{t}{2}$, то получится:

$$1 - \cos t = 2 \sin^2 \frac{t}{2}.$$

Поэтому

$$s = 2 \int_{t_0}^t \sin \frac{t}{2} dt = 4 \int_{t_0}^t \sin \frac{t}{2} d \frac{t}{2} = -4 \cos \frac{t}{2} \Big|_{t_0}^t.$$

За начало счета обычно выбирают точку, для которой $s = 0$. В случае циклоиды таковой является ее верхняя точка $t = \pi$. Поэтому для промежутка $] \pi, 2\pi [$ имеем:

$$s = -4 \left(\cos \frac{t}{2} - \cos \frac{\pi}{2} \right) = -4 \cos \frac{t}{2}.$$

Минусу в формуле для вычисления длины дуги удивляться не следует, так как в указанном промежутке функция $\cos \frac{t}{2}$ имеет отрицательные значения.

Мы предоставляем читателю проделать самому все вычисления для кривизны. Получится:

$$k = - \frac{1}{4 \sin \frac{t}{2}}.$$

Теперь нам надо избавиться от параметра t — он не должен входить в натуральное уравнение кривой — и свести два последних равенства в одно. Для этого перепишем их так:

$$\cos \frac{t}{2} = -\frac{s}{4}, \quad \sin \frac{t}{2} = -\frac{1}{4k}.$$

Тогда

$$\left(\frac{1}{k} \right)^2 + s^2 = 16.$$

Это и есть натуральное уравнение циклоиды.

3. *Трактриса*. Эта линия получается следующим образом. Пусть на плоскости имеется прямая (ось абсцисс) и вне этой прямой точка M . В точке M находится тяжелая тележка, присоединенная тросом длины a к трактору, который может двигаться только по оси абсцисс (дороге). Траектория, которую будет описывать точка M при равномерном движении трактора, и называется трактрисой (от латинского *tracto* — «тащу, влеку», с этим же корнем связано название «трактор»).

Существует еще один, очень простой, способ «увидеть» трактрису. Поставим кости домино вертикально на не-



Рис. 58

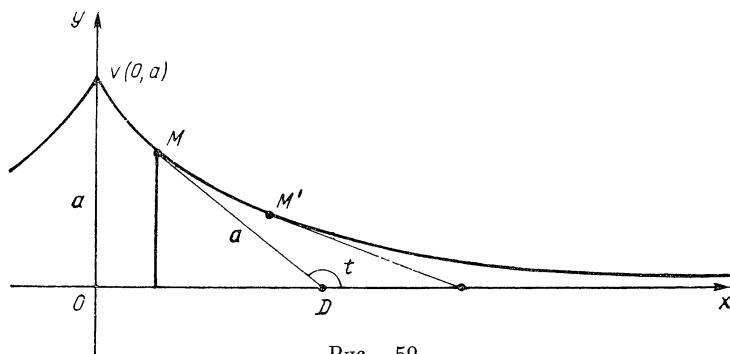


Рис. 59

большом расстоянии друг от друга. Перед первой установим препятствие. Если толкнуть последнюю, то кости расположатся так, как показано на рисунке 58, и линия AB — трактриса! Более того, из этой забавы становится очевидным геометрическое свойство трактрисы: оно состоит в постоянстве длины отрезка a касательной от точки кривой до оси абсцисс (рис. 59) (кости имеют одинаковые размеры).

Это свойство и позволит нам вывести уравнение трактрисы. За параметр t естественно принять угол $XDM = t$, измеряемый в радианах. Очевидно, он может принимать все значения между $\frac{\pi}{2}$ и π . Тогда получим:

$$y = a \sin t. \quad (6.13)$$

Со вторым уравнением так просто не получится. Напомним сначала, что тангенс угла t есть производная $\frac{dy}{dx}$.

Правда, от этого вроде бы не легче, так как в равенстве

$$y' = \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} t \Rightarrow dy = \operatorname{tg} t \cdot dx$$

нет достаточного числа известных нам величин. Но в силу (6.13) имеем:

$$\frac{dy}{dt} = a \cos t \Rightarrow dy = a \cos t \cdot dt.$$

Поэтому

$$dx = a \frac{\cos^2 t}{\sin t} dt = \frac{a}{\sin t} dt - a \sin t dt.$$

Отсюда можно найти функцию $x(t)$ сначала в таком виде:

$$x(t) = a \int \frac{1}{\sin t} dt - a \int \sin t dt.$$

Второй интеграл хорошо известен:

$$-\int \sin t dt = \cos t + C_2.$$

Для отыскания первого надо проделать ряд преобразований или заглянуть в справочник. А в справочнике найдем:

$$\int \frac{dt}{\sin t} = \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} + C_1.$$

Эту формулу можно проверить дифференцированием. Напомним, что \ln — знак натурального логарифма.

Итак, для искомой функции можно записать такое выражение:

$$x(t) = a \left(\ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} + \cos t \right) + C,$$

где $C = C_1 + C_2$ — произвольная постоянная. Эту постоянную мы могли бы и не определять: дальше нам понадобятся лишь производные от функций $x(t)$ и $y(t)$, а производная постоянной равна нулю. Но все же стоит заметить, что обычно полагают $C = 0$. Тогда $x = 0$ при $t = \frac{\pi}{2}$, ибо $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$ и $\ln 1 = 0$. Конечно, такое значение параметра t означает при реальном движении трактора предельное положение, когда трос перпендикулярен дороге. Очевидно, движение может происходить и в противоположную сторону (отрицательные абсциссы). Тогда получится кривая, симметричная только что рассмотренной относительно оси ординат.

Итак, уравнение трактрисы можно записать в виде:

$$\bar{r} = a \left(\ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} + \cos t \right) \bar{i} + a \sin t \bar{j}.$$

Несмотря на кажущуюся громоздкость уравнения, вычисление производных, длины дуги и кривизны не представляют особого труда. Предоставим их выполнение читателю и выпишем результаты:

$$s = -a \ln \sin t$$

(знак минус — на месте, ибо логарифм синуса отрицателен),

$$k = \frac{1}{a \operatorname{ctg} t}.$$

Отсюда получается натуральное уравнение трактрисы:

$$\left(\frac{1}{k}\right)^2 = a^2 \left(e^{\frac{2s}{a}} - 1\right).$$

Оно сложнее предыдущих, но и из него можно сделать полезные выводы. Прежде всего, мы видим, что при $s = 0$ значение функции k не определено (справа — нуль, а слева — положительное число). Это соответствует тому, что точка $V(0, a)$, для которой $s = 0$, — особая.

Далее, при $s \rightarrow \infty$ правая часть уравнения трактрисы бесконечно возрастает; следовательно, $k \rightarrow 0$. Это означает, что при достаточно больших s трактриса не отличима от прямой линии, кривизна которой всюду равна нулю. Можно указать и ту прямую, к которой приближается трактриса при $s \rightarrow \infty$, — это дорога, т. е. ось абсцисс (см. рис. 59).

Прямая, к которой кривая приближается «в бесконечности», называется *асимптотой*. Примеры асимптот читатель видел на обложке книги «Алгебра, 9—10» (асимптоты $y = \pm \frac{\pi}{2}$ тангенсоиды $y = \operatorname{tg} x$ и асимптоты $y = 0$ и $x = 0$ гиперболы $y = \frac{1}{x}$). Теперь мы познакомились еще с одной асимптотой. К ней приближаются (так же, как и к асимптотам гиперболы) две ветви трактрисы (это ясно из симметрии кривой относительно оси координат).

Характер приближения кривой к асимптоте диалектичен. «Ветвь кривой (в нашем случае — трактрисы) становится все прямее ($k \rightarrow 0$), не делаясь никогда вполне прямой (кривизна k не равна нулю ни при каком значении s)» — именно этими словами¹ (кроме того, что мы добавили

¹ Маркс К., Энгельс Ф. Соч., т. 20, с. 579.

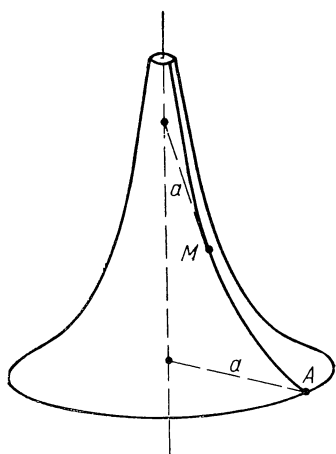


Рис. 60

в скобках) Ф. Энгельс в «Диалектике природы» демонстрирует, как действует в математике важнейший закон диалектики — закон единства противоположностей.

Для тех читателей, которые не захотят читать эту книгу до конца, но захотят все же извлечь из уже прочитанного побольше пользы, заметим, что трактриса играет весьма важную роль и в теории поверхностей, и в геометрии Лобачевского. Именно, если вращать трактрису вокруг ее асимптоты, то получится поверхность (рис. 60) с удивительными свойствами. Внешне она совершенно не похожа на сферу; но оказывается, она, как и сфера, повсюду (кроме, конечно, особой окружности VV' , полученной вращением особой точки V трактрисы) одинаково искривлена. Ее называли *псевдосферой*. Известно, что если вырезать любой кусочек сферы, то его можно наложить на любое другое место этой же сферы. Конечно, этим же свойством обладает и плоскость: ее куски можно передвигать по самой себе как угодно. Оказывается, что если вырезать кусочек псевдосферы, то его тоже можно наложить на любое другое место этой поверхности. Это дает возможность утверждать, что геометрия на псевдосфере должна быть похожа на геометрию на плоскости (планиметрию). А именно на псевдосфере можно «интерпретировать» планиметрию Лобачевского. Этот удивительный факт установил итальянский геометр Эудженио Бельтрами (1835—1900) более ста лет тому назад (первая публикация относится к 1868 г.), хотя трактриса впервые была найдена еще в XVII в. Лейбницем. Любопытно, что Лейбниц построил трактрису, решая ту же задачу, которую сформулировали и мы. Поставлена же она была впервые в 1675 г. парижским ученым Клодом Перро, братом Шарля Перро, автора бессмертной «Красной шапочки». Так неожиданно встречаются иногда в истории знакомые нам с детства имена ...

ОТ ПОЛЯРНОЙ ЗВЕЗДЫ— К КООРДИНАТАМ НА ПОВЕРХНОСТИ

Познакомившись с методами изучения линий, мы можем перейти к изучению более сложных геометрических образов — поверхностей.

Одна поверхность хорошо известна, она исследовалась еще в древности. Это сфера, модель которой — небесный свод — древние мудрецы, созерцатели и философы наблюдали и днем и ночью. Астрономы и астрологи, изучая звездное небо, давным-давно заметили, что небесная сфера в течение суток совершает полный оборот вокруг оси, проходящей через Полярную звезду. При этом большинство видимых звезд имеют на вращающейся небесной сфере вполне определенное расположение, сохраняющееся веками, и образуют созвездия. Лишь немногие светила перемещаются относительно созвездий. Греки называли эти немногие блуждающими звездами (πλανήτες ἀστέρεις), откуда и произошло название «планеты». В древности считалось, что планет семь (Солнце, Луна, Меркурий, Венера, Марс, Юпитер и Сатурн). То, что Земля тоже планета, впервые было доказано великим польским ученым Николаем Коперником (1473—1543).

Изучение созвездий и движения планет относительно них немыслимо без введения какой-то системы отсчета, системы координат. Такая система на сфере появилась задолго до декартовой системы координат на плоскости. Ясно, что особое положение Полярной звезды естественным образом сделало ее точкой отсчета, началом координат на небесной сфере. Если мысленно провести через

Полярную звезду и центр небесной сферы (центр Земли) диаметр (астрономы называют его осью мира), то он пересечет небесную сферу и в южном полушарии. Тем, кто находится в южном полушарии, «не повезло»: в точке пересечения оси мира со сферой в этом полушарии нет сколько-нибудь яркой звезды, которая сыграла бы для них роль нашей Полярной.

Продолжим координатизацию небесной сферы. Большие круги, проходящие через Полярную, — небесные меридианы, линии одинаковой долготы. Окружности же, образующиеся при пересечении сферы плоскостями, перпендикулярными оси мира, — параллели, линии одинаковой широты. Именно по таким параллелям и движутся все звезды при вращении небесного свода вокруг оси мира.

Обратимся к другой сфере, заинтересовавшей ученых значительно позднее небесной, но не менее важной для практики. Речь пойдет о поверхности земного шара. Правда, придирчивый читатель скажет, что Земля — не шар, но у нас речь идет о самом грубом приближении, моделью которого является глобус. Место Полярной звезды займет теперь Северный полюс N . Через него и Южный полюс S проходят меридианы. Сечения, перпендикулярные земной оси, дают параллели. Возникают географические координаты, изученные читателем еще в курсе географии восьмилетней школы. И наверное, каждому полезно знать долготу и широту своего города или села. Долгота отсчитывается от какого-нибудь фиксированного меридиана (чаще всего — от меридиана, проходящего через упомянутую в первой главе Гринвичскую обсерваторию). К востоку от него она называется восточной, к западу — западной. Широта же обычно отсчитывается от экватора: к Северному полюсу — северная, к Южному — южная. Это очень удобно для географов и путешественников, но не совсем удобно (и совсем непригодно!) для математиков, которые давно уже отказались от словесного обозначения направлений («выше — ниже», «правее — левее» и т. п.), заменив их знаками плюс и минус. Впрочем, для сферы можно обойтись лишь положительными числами, начав отсчет «широт», например, с точки N , считая ее широту равной нулю. Тогда максимальная «широта» (широта точки S) окажется равной π (мы перешли к привычной для геометров радианной ме-

ре). При таком направлении отсчета каждой параллели будет соответствовать единственное число — широта — уже без всяких дополнительных пояснений. Аналогично можно поступить и с меридианами, считая их не в двух, а только в одном направлении от нулевого. Таким образом, каждая точка сферы получит свою пару координат, почти так же, как это получается на плоскости. Почему почти? Прежде всего потому, что непонятно, ка-

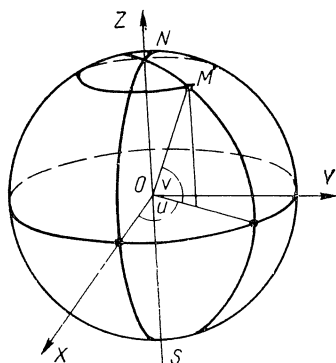


Рис. 61

кую долготу имеет точка N . Вроде бы любую? Или никакую? То же самое происходит и в противоположной точке S . Широта есть, она равна π . А долготы нет. Это обстоятельство выглядит очень странным. Получается, что две точки на сфере обладают особыми свойствами, а мы хорошо знаем, что все точки сферы совершенно одинаковы, т. е. никаких особых быть не должно. Немного позднее мы вернемся к этой странности, а сейчас продолжим изучение введенных на сфере координат, вспомнив связывающее их уравнение сферы (гл. II, уравнение (2.37)):

$$\bar{r}(u, v) = a \sin v \cdot \bar{e}(u) + a \cos v \bar{k}. \quad (7.1)$$

Это уравнение устанавливает отображение множества пар чисел (u, v) на точки сферы. Правда, здесь для долготы (будем ее обозначать буквой u) достаточно взять промежуток $[0, 2\pi[$, а для широты (она обозначена буквой v) — промежуток $[0, \pi]$. Полюсы, конечно, «мешают», но если их пока не рассматривать, то можно считать установленным соответствие

$$M \Leftrightarrow (u, v),$$

где точка M определяется радиус-вектором по формуле (7.1). Смысл этой формулы ясен из сказанного, а также из рисунка 61. Полезно при этом вспомнить, что так как в соответствии с (2.30)

$$\bar{e}(u) = \cos u \bar{i} + \sin u \bar{j},$$

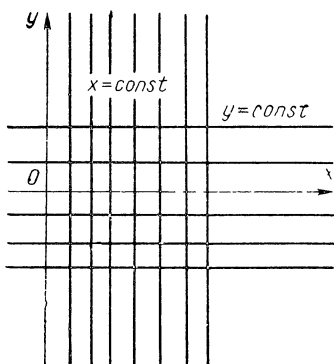


Рис. 62

то (7.1) подробнее можно записать в виде:

$$\bar{r}(u, v) = a \cos u \sin \bar{v}i + a \sin u \sin \bar{v}j + a \cos \bar{v}k.$$

Координаты u и v называют криволинейными. И вот почему. Любая линия на плоскости, имеющая уравнение $x = \text{const}$, есть прямая (рис. 62). Аналогично и линия $y = \text{const}$ тоже прямая. В частности, прямые $x = 0$ и $y = 0$ суть оси координат. А что будет на сфере? Случаю

$u = 0$ на рисунке 61 соответствует окружность большого круга, лежащая в плоскости xOz , т. е. это «начальный меридиан», от которого ведут отсчет географы. Естественно, что при $u = 0$ (7.1) дает уже встречавшееся нам во второй главе уравнение окружности:

$$\bar{r}(0, v) = \bar{\rho}(v) = a \sin \bar{v}i + a \cos \bar{v}k, \quad (7.2)$$

здесь $\bar{\rho}(v)$ есть вектор-функция одного аргумента.

Для любого $u = u_0 \neq 0$ на рисунке 61 тоже будет получаться окружность большого круга, т. е. еще один меридиан. Его уравнение можно записать в виде вектор-функции одного аргумента:

$$\bar{\rho}_1(v) = \bar{r}(u_0, v) = a \sin \bar{v}e(u_0) + a \cos \bar{v}k. \quad (7.3)$$

И из рисунка 61 и из (7.3) видно, что эта окружность расположена в плоскости векторов $\bar{e}(u_0)$ и \bar{k} . Обобщая, можно сказать, что все линии

$$u = \text{const}$$

суть меридианы.

Зафиксируем теперь v . Пусть, например, $v = \frac{\pi}{2}$.

Для этого значения переменной («широты») на рисунке 61 получается экватор. Из формулы (7.1) получим его уравнение

$$\bar{r}\left(u, \frac{\pi}{2}\right) = \bar{\rho}\left(u, \frac{\pi}{2}\right) = a\bar{e}(u).$$

Уже ясно, что получится при $v = \text{const}$, но давайте проделаем все аккуратно. Итак, пусть $v = v_0$. Тогда из (7.1) получаем:

$$\bar{\rho}_2(u) = r(\bar{u}, v_0),$$

или подробнее:

$$\bar{\rho}_2(u) = a \sin v_0 \bar{e}(u) + a \cos v_0 \bar{k}. \quad (7.4)$$

Обозначим входящие в (7.4) постоянные величины, например, так:

$$\begin{aligned} a \cos v_0 &= b, \\ a \sin v_0 &= c. \end{aligned}$$

Тогда линия $v = \text{const}$ будет иметь уравнение

$$\bar{\rho}_2(u) = c\bar{e}(u) + b\bar{k}.$$

Как и следовало ожидать, получилась окружность. Радиус ее равен c , расположена она в плоскости, отстоящей на $b = a \sin v_0$ единиц от экватора (рис. 61). Это параллели.

Возьмем конкретную точку сферы $M_0(u_0, v_0)$ и будем изучать не всю сферу, а только эту точку с ее окрестностью (локальный подход, о котором читатель знает из гл. IV). Тогда ни сама точка, ни точки, лежащие в ее окрестности, не являются полюсами. Через M_0 проходят, как мы это только что видели, две координатные окружности. Одна из них ($u = u_0$) имеет уравнение (7.3), вторая ($v = v_0$) — уравнение (7.4).

Важно выяснить, как расположены эти окружности относительно друг друга. Найдем векторы \bar{t}_1 и \bar{t}_2 , касающиеся этих окружностей в точке M_0 . Для этого (см. гл. III) необходимо найти соответствующие производные. Для линии $u = u_0$, дифференцируя (7.3), получаем вектор

$$\bar{t}_1 = \frac{d\bar{\rho}_1(v)}{dv} = a (\cos v \bar{e}(u_0) - \sin v \bar{k}).$$

Для линии $v = v_0$, дифференцируя (7.4), получаем вектор

$$\bar{t}_2 = \frac{d\bar{\rho}_2(u)}{du} = a \sin v_0 \bar{e}'(u).$$

Составим скалярное произведение этих векторов для точки M_0 :

$$\bar{t}_1 \cdot \bar{t}_2 = a^2 (\cos v_0 \cdot \sin v_0 \bar{e}(u_0) \cdot \bar{e}'(u_0) - \sin^2 v_0 \bar{e}'(u_0) \cdot \bar{k}).$$

Так как \bar{e} , \bar{e}' и \bar{k} образуют декартов базис, то $\bar{t}_1 \cdot \bar{t}_2 = 0$, т. е. векторы \bar{t}_1 и \bar{t}_2 перпендикулярны.

Угол между кривыми принято определять как угол между касательными к этим кривым в точке их пересечения (это одно из расширений понятия «угол», известного читателю). В данном случае угол оказался прямым. Поэтому и говорят, что параллели и меридианы ортогональны.

Итак, криволинейная система координат на сфере локально очень похожа на декартову систему координат на плоскости, ибо две важные ее особенности (исключение полюсов из рассмотрения и ограничение промежутков для аргументов) при локальном рассмотрении несущественны. Правда, существенно другое. При локальном рассмотрении в окрестности некоторой точки M_0 с фиксированными значениями $u = u_0$ и $v = v_0$ нет, вообще говоря, *системы координат*, а есть только *координатная сеть*, так как начальный меридиан и экватор могут и не попасть в окрестность точки, а полюсы и не должны входить в нее.

Вообще *сетью* называют такую совокупность кривых, которая состоит из двух семейств, причем через каждую точку окрестности проходит одна и только одна линия каждого семейства. Такую сеть мы будем называть *правильной*. Если рассматривать не все линии этой совокупности, а только некоторые из них, расположенные на некотором удалении друг от друга, то получается нечто похожее на рыболовную сеть (рис. 63). Если же рассмотреть все линии совокупности, то они покроют собой всю окрестность. В окрестности полюсов координатная сеть всегда не-

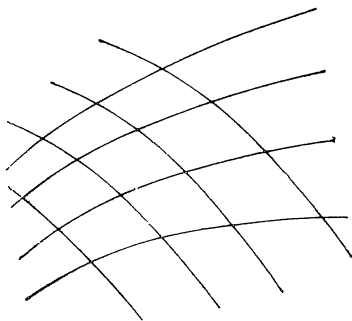


Рис. 63

правильная, так как через полюс проходит бесконечное множество линий одного и того же семейства.

Итак, параллели и меридианы сферы в окрестности любой точки образуют правильную координатную сеть, если эта окрестность не содержит полюс.

Мы знаем (гл. I), что декартовы переменная величина и координаты на плоскости произвели революцию в математике, дав возможность описывать на алгебраическом языке свойства геометрических фигур (прежде всего линий). Криволинейные координаты на сфере, как мы только что в этом убедились, не так уж глубоко отличаются от декартовых на плоскости. Казалось бы, возникнув гораздо раньше, координаты на сфере должны были дать аналогичную возможность для изучения свойств и самой сферы, и линий, и поверхностей на ней. Но древние применяли сферические координаты лишь в астрономии, географии и картографии. До переменной величины, до движения и диалектики, до изучения свойств поверхностей и линий на них было еще далеко. Даже и после открытия интегрального исчисления задачи о поверхностях сводились только к вычислению их площадей.

Нужно было увидеть новые задачи и суметь их правильно поставить, а это всегда очень трудно и требует усилий гениальных людей. В каждой науке были такие первооткрыватели, в дифференциальной геометрии — это прежде всего Л. Эйлер и Г. Монж. Теперь мы расскажем о них подробнее, чем это было сделано в первой главе, так как мы получили возможность говорить о том, без чего рассказ об ученых теряет смысл, — об их трудах.

Эйлер родился в 1707 г. в Швейцарии. Еще юношей он переехал в Петербург и начал работать в Петербургской Академии наук, открытой 13 ноября 1725 г. Детство Эйлер провел в Базеле, где решающее влияние на его математическую подготовку оказал Иоганн Бернулли, один из ближайших и активнейших соратников Лейбница по разработке и пропаганде идей дифференциального исчисления. В 1741 г. Эйлер переехал в Берлин, но в 1766 г.



Л. Эйлер

вновь вернулся в Петербург и после этого больше не уезжал из России. По существу Российская Академия создана Ломоносовым и Эйлером. Эйлер, как и его друг М. В. Ломоносов, был необычайно трудолюбив. Он занимался самыми разными отраслями математики, механики, физики и астрономии. Систематизация и публикация его трудов до сих пор не завершены. Общее число монографий и статей, написанных Эйлером, составляет более 800, не считая примерно трех тысяч писем научного содержания! О том, как работал Эйлер, свидетельствует письмо одного из Бернулли (в семье Бернулли было несколько профессоров математики): «Здоровье его (Эйлера) довольно хорошо... Зрением, по большей части утраченным, а в одно время вовсе потерянным, он, однако, теперь пользуется лучше, чем многие воображают. Хотя он не может узнать никого в лицо, читать черное на белом и писать пером на бумаге, однако пишет на черном столе свои математические вычисления мелом очень ясно и порядочно... Потом они выписываются в большую книгу одним из его адъютантов... И из этих-то материалов составляются под его руководством статьи. Таким образом, в продолжение пяти лет приведено к окончанию 120 или 130 статей». Это письмо написано в 1777 г., всего за шесть лет до того, как Эйлер, по прекрасному выражению одного из его современников, «прекратил вычислять и жить».

Из этой огромной массы статей и монографий Эйлера специально геометрии посвящены немногие. Во втором томе знаменитого «Введения в анализ бесконечных» имеется «Приложение о поверхностях», где впервые дана полная классификация поверхностей второго порядка. Именно Эйлер впервые показал, что все поверхности, задаваемые уравнениями второй степени относительно трех пространственных координат x , y , z и не являющиеся конусами, сводятся к пяти видам (эллипсоид, однополостный гиперболоид, двуполостный гиперболоид, эллиптический параболоид, гиперболический параболоид, см. рис. 64). Введя остроумные, хотя и несколько тяжеловесные формулы перехода от одной системы декартовых координат к другой, Эйлер показал, как можно записать уравнения этих поверхностей в наиболее простом виде. Этот результат Эйлера до сих пор является основным в аналитической геометрии — учебной дисциплине, изу-

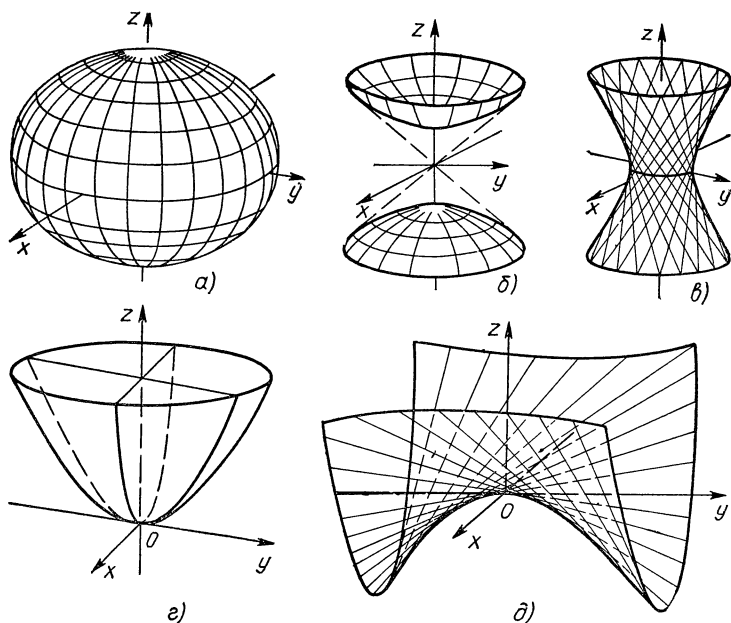


Рис. 64

чаемой па первых курсах всех вузов, где есть курс математики.

Теория поверхностей занимается изучением не только поверхностей второго порядка. Но для изучения поверхностей общего вида нужны другие методы, отличные от методов аналитической геометрии. В их создании важную роль сыграла работа Эйлера «Исследования о кривизне поверхностей», появившаяся в 1760 г. В ней впервые ставился вопрос о кривизне поверхности самого общего вида в ее произвольной точке и была сделана попытка найти инвариант, характеризующий «внутренние» свойства поверхности, т. е. свойства, не зависящие от способа задания поверхности и от выбора системы координат.

К понятию кривизны поверхности Эйлер подошел самым естественным образом. Он стал рассматривать кривизны всех линий, проходящих через данную точку поверхности, и искать среди них наибольшую и наименьшую. Мы еще вернемся к этой идее. Эйлер, как и Лейб-



Г. Монж

ниц, как и все семейство Бернулли и многие другие математики того времени, не очень-то заботился о тщательности отделки своих работ, об изяществе формул, о краткости изложения. Лишь во второй половине XIX в. появилось само понятие математической строгости и ученые стали более тщательно шлифовать свои работы. А Эйлер писал следом за своей гениальной мыслью подробно, длинно, не оглядываясь и почти не проверяя написанного. Благодаря своей гениальности он делал не так уж много ошибок, но все-таки делал...

В разработке теории поверхностей следующий шаг вслед за Эйлером сделал знаменитый французский математик Гаспар Монж, написавший книгу со скромным названием: «Приложение анализа к геометрии, предназначенное для употребления в императорской политехнической школе» — учебник для студентов парижского высшего учебного заведения, и поныне являющегося одним из лучших вузов Франции. Политехническая школа была создана самим Монжем, активным участником Великой французской буржуазной революции, соратником Наполеона, видным деятелем и организатором высшего образования во Франции. Имя Монжа хорошо известно всем инженерам, так как в его книге «Начертательная геометрия» впервые были изложены теоретические основы языка современной техники — черчения.

«Приложение анализа» создавалось в течение ряда лет. Первые части будущей книги появились еще в 1795 г., окончательный текст — в 1801 г., позднее книга переиздавалась с различными дополнениями.

Конечно, в своей работе Монж мог использовать только еще довольно скромный математический аппарат. Поверхность он задает уравнением

$$z = z(x, y)$$

относительно декартовой системы координат, а потом записывает это уравнение еще короче: $M = 0$. До сих пор сохранились введенные Монжем для краткости обозначе-

ния частных производных функции $z(x, y)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = s, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t.$$

Задачи, возникавшие в процессе создания теории поверхностей, сводились к уравнениям относительно дифференциалов (производных). Такие уравнения называются дифференциальными. В настоящее время теория этих уравнений (дифференциальных уравнений) составляет самостоятельный раздел математики, которого во времена Монжа, конечно, еще не существовало. Монжу пришлось одновременно строить и теорию поверхностей, и теорию дифференциальных уравнений. Пытаясь классифицировать и уравнения и поверхности одновременно, Монж нашел ряд поверхностей, которые характеризуются своими внутренними инвариантными свойствами, и соответствующие им дифференциальные уравнения.

Например, в § 12 своей книги он установил, что уравнение

$$rt - s^2 = 0$$

характеризует поверхность, которую можно представить как совокупность точек, принадлежащих всем касательным некоторой пространственной кривой. Эта поверхность получила название развертывающейся. В наше время ее называют короче — *торсом*. Мы еще не раз встретимся с этой поверхностью.

Монж получил дифференциальные уравнения многих классов поверхностей, описал ряд свойств каждого класса, но общей теории поверхностей он не создал. Это вполне закономерно: для создания общей теории всегда необходимо накопить определенный запас отдельных фактов. Обычно, изучая эти факты, ученые — если это крупные ученые — устанавливают и некоторые отдельные общие закономерности. Так было и с Монжем, доказавшим знаменитую «теорему Монжа», — мы еще встретимся с ней в девятой главе, когда обратимся к общей теории поверхностей. Сейчас же подчеркнем, что очень немногие научные теории имеют столь солидное начало, каким для дифференциальной геометрии послужили работы Монжа.

Ученики Монжа и многие математики других стран продолжали изучать отдельные поверхности теми же средствами, а для нового решительного шага вперед нужен был новый гений. Им оказался Гаусс.



К. Ф. Гаусс

XVIII век математики называют веком Эйлера. В первой половине XIX в. общепризнанным лидером в математике стал Карл Фридрих Гаусс (1777—1855). Впрочем, английское слово *leader* тогда еще почти не употреблялось, и Гауссу — неофициально, конечно, — было присвоено более привычное для той эпохи латинское звание «*princeps mathematicorum*», что означает приблизительно «король математиков». Официально же он занимал сравнительно скромное положение, достигнутое им к тридцати го-

дам: он был директором геттингенской обсерватории и профессором геттингенского университета (Геттинген — небольшой город в Западной Германии. Университет в нем основан в 1737 г. К числу наиболее известных профессоров этого университета, наряду с Гауссом, относятся также математики Бернгард Риман, Феликс Клейн, Давид Гильберт, Герман Вейль, химик Роберт Бунзен, физик Вильгельм Вебер, знаменитые филологи Якоб и Вильгельм Гримм и многие другие).

Обязанности профессора Гаусс выполнял не очень охотно: элементарное (по сравнению с его познаниями и научными достижениями) преподавание тяготило его. Гаусс опубликовал сравнительно небольшое число научных работ: в полном собрании его сочинений они занимают всего семь томов. Но для них характерна тщательность изложения, глубина и полнота разработки проблем. У Гаусса был свой принцип: «Еще ничего не сделано, если хоть что-то осталось сделать». Следуя этому принципу, он не решился опубликовать и оставил в рукописях много по существу законченных, но не вполне его удовлетворявших работ.

Значительная часть трудов Гаусса носит прикладной характер и относится к астрономии, физике, а также к геодезии, т. е. науке об измерениях на земной поверхности. Отправляясь от практических геодезических работ, Гаусс пришел к идее общего исследования поверх-

ностей. В знаменитой работе «Общие исследования о кривых поверхностях», вышедшей в свет в 1828 г., он впервые точно сформулировал понятие кривизны поверхности (позднее этот инвариант так и называли — «гауссова кривизна»), установил ее связь с кривизнами линий, лежащих на поверхности, и доказал очень важную теорему об этой кривизне. Гаусс сам почувствовал значение доказанной им теоремы и назвал ее *theorema egregium* (превосходная теорема). О ней мы тоже будем говорить, как и о теореме Монжа, а сейчас отметим другую, не сразу оцененную и самим Гауссом и другими геометрами идею, которая сыграла очень важную роль в дальнейшем развитии дифференциальной геометрии.

Гаусс пишет, что «есть два общих способа для изучения кривых поверхностей. В первом пользуются уравнением между координатами x, y, z , которое мы полагаем приведенным к виду $w = 0$, где w есть функция переменных x, y, z . Во втором способе координаты рассматриваются как функции двух независимых переменных».

Первым способом работал еще Монж (мы специально обратили внимание читателя на запись $M = 0$ в его «Приложении анализа к геометрии»), а второй впервые систематически стал применять только Гаусс. Правда, пользовался он им осторожно, все время возвращаясь к первому и применяя не очень удачные обозначения (тем не менее некоторые из них применяются и поныне!). И все-таки именно вторым способом он и получил свои наиболее общие результаты!

А ведь задание x, y, z как функций двух переменных равносильно заданию вектор-функции

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v), \quad (7.5)$$

о чем мы говорили в § 6 второй главы. И хотя во время жизни Гаусса понятия вектора и вектор-функции еще не были созданы, тем не менее Гаусс фактически пользовался ими и применял их при разработке теории произвольных поверхностей. Именно это и было тем решающим шагом, с которого началась общая теория поверхностей.

В чем же заключаются преимущества задания поверхности при помощи вектор-функции двух аргументов?

Первое из них состоит в том, что исследование поверхностей при таком задании совершенно не зависит от выбора исходной декартовой системы координат, так как

при переходе от одной декартовой системы координат к другой происходит лишь такое преобразование (рис. 65):

$$\vec{r} = \vec{r}^* + \vec{OO}^*,$$

т. е. прибавляется постоянное слагаемое \vec{OO}^* , которое исчезает при первом же дифференцировании. А в обычных декартовых координатах формулы перехода выглядят громоздко.

Кроме того, первые шаги построения канонического репера также выполняются очень просто, так как при задании поверхности в виде (7.5) очень просто определяется понятие касательной плоскости к этой поверхности, что, в свою очередь, позволяет легко построить перпендикуляр к касательной плоскости в точке касания — *нормаль*.

С понятия касательной плоскости мы и начнем. Возьмем на исследуемой поверхности некоторую точку $M(u_0, v_0)$, т. е. точку с радиус-вектором $\vec{r}_0 = \vec{r}(u_0, v_0)$. Через нее могут быть проведены всевозможные линии на поверхности. Что представляет собой множество касательных, проведенных ко всем этим линиям в точке M ? Раз все они проходят через одну общую точку, то возникают только две возможности: либо они образуют конус (конечно, не обязательно прямой круговой), либо все они лежат в одной плоскости, которую естественно называть *касательной*. И мы сейчас покажем, что в общем случае получится именно плоскость.

Сначала вспомним, что если вектор-функцию двух аргументов сделать вектор-функцией только одного из них, то вместо поверхности получится линия, лежащая на той же поверхности. Мы уже имели два таких примера — первый еще во второй главе, когда говорили о прямом геликоиде, а второй — только что, рассматривая сферу. Мы полагали тогда u или v постоянными и получали вектор-функции одного переменного. Эти функции порождали два семейства координатных линий. Очевидно, так можно сделать и для любой поверхности. Будем обозначать координатные семейства $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$. Касательные к двум координатным линиям, проходящим через точку $M(u_0, v_0)$, найти нетрудно.

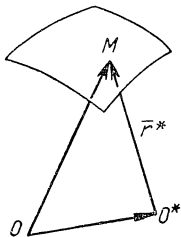


Рис. 65

Сначала найдем производную вектор-функции $\bar{r} = \bar{r}(u_0, v)$. Эта производная есть, по существу, частная производная $\frac{\partial \bar{r}}{\partial v}$, она является вектором, параллельным касательной к линии $u = u_0$. А теперь точно так же найдем производную вектор-функции $\bar{r} = \bar{r}(u, v_0)$. Эта производная, в свою очередь, есть вектор, параллельный касательной к линии $v = v_0$. Итак, две касательные уже есть, это касательные к координатным линиям. Конечно, они, как и любая пара пересекающихся прямых, определяют некоторую плоскость. Если нам удастся показать, что и касательная к произвольной третьей линии, лежащей на поверхности и проходящей через точку $M(u_0, v_0)$, тоже принадлежит этой плоскости, то задача построения касательной плоскости будет решена. Попробуем.

Но как задать произвольную линию на поверхности? Иначе говоря, как в общем случае сделать вектор-функцию $\bar{r}(u, v)$ функцией одного аргумента? Очень просто. Надо положить

$$\begin{aligned} u &= u(t), \\ v &= v(t), \end{aligned} \quad (7.6)$$

т. е. задать две произвольные функции одного аргумента t . А чтобы эта линия проходила через точку $M(u_0, v_0)$, надо, конечно, потребовать, чтобы для некоторого значения аргумента $t = t_0$ выполнялись равенства

$$u(t_0) = u_0, \quad v(t_0) = v_0.$$

Радиус-вектор точки этой линии можно теперь записать так:

$$\bar{r}(t) = \bar{r}(u(t), v(t)), \quad (7.7)$$

а касательная к этой линии будет параллельна вектору

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{r}_u \frac{du}{dt} + \bar{r}_v \frac{dv}{dt}. \quad (7.8)$$

При $t = t_0$, $u = u_0$, $v = v_0$ эта формула действует и в точке $M(u_0, v_0)$, причем векторы \bar{r}_u и \bar{r}_v зависят в ней только от координат самой точки и не зависят от выбора линии (7.6). Следовательно, касательные ко всем линиям на поверхности, проходящим через данную точку поверхности, т. е. все векторы (7.8), линейно зависят от одной и той же пары векторов: $\bar{r}_u(u_0, v_0)$ и $\bar{r}_v(u_0, v_0)$. Если

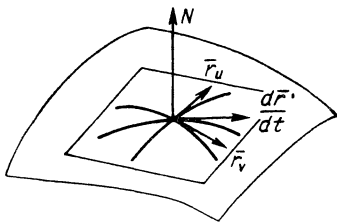


Рис. 66

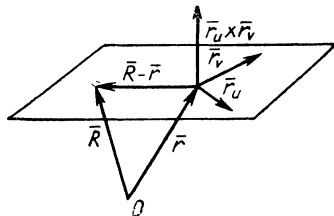


Рис. 67

эти векторы не параллельны и ни один из них не равен нулю, то все векторы (7.8) лежат в плоскости, определяемой векторами $\bar{r}_u(u_0, v_0)$ и $\bar{r}_v(u_0, v_0)$ (рис. 66).

Итак, чтобы все было так, как нам хочется, придется потребовать, чтобы во всех точках поверхности

$$\bar{r}_u \neq 0, \bar{r}_v \neq 0, \bar{r}_u \nparallel \bar{r}_v. \quad (7.9)$$

Вспомнив (гл. II) определение векторного произведения, получаем, что касательная плоскость определена всякий раз, когда

$$\bar{r}_u \times \bar{r}_v \neq 0.$$

А уравнение касательной плоскости в точке M запишется так:

$$(\bar{R} - \bar{r}) \cdot \bar{r}_u \cdot \bar{r}_v = 0 \quad (7.10)$$

(с этого момента мы будем писать $\bar{r}, \bar{u}, \bar{v}$ вместо \bar{r}_0, u_0, v_0 , так как все равно речь идет о произвольной точке поверхности). Уравнение (7.10) отражает тот факт (рис. 67), что векторы $\bar{R} - \bar{r}, \bar{r}_u$ и \bar{r}_v , где \bar{R} — радиус-вектор любой точки касательной плоскости, компланарны (см. гл. II). В то же время вектор $\bar{r}_u \times \bar{r}_v$, перпендикулярный плоскости, определяет нормаль к ней, проведенную в точке M . Нормаль имеет уравнение (ср. (2.36))

$$\bar{R} = \bar{r} + \lambda (\bar{r}_u \times \bar{r}_v).$$

Договоримся, что отныне мы рассматриваем только такие точки поверхности и только такие криволинейные координаты в их окрестности, для которых, кроме обычных требований дифференцируемости, всегда выполнено условие (7.9). Точки поверхности, где это условие не выполнено, называются *особыми*.

Посмотрим теперь, как это все получается для уже известных нам поверхностей.

1. Сфера. Уравнение

$$\bar{r} = a \sin v \cdot \bar{e}(u) + a \cos v \bar{k}. \quad (7.11)$$

Производные:

$$\bar{r}_u = a \sin v \cdot \bar{e}', \quad \bar{r}_v = a \cos v \cdot \bar{e}(u) - a \sin v \bar{k}.$$

Вектор нормали (он вычисляется по формуле (2.24)):

$$\begin{aligned} \bar{r}_u \times \bar{r}_v &= \begin{vmatrix} \bar{e} & \bar{e}' & \bar{k} \\ 0 & a \sin v & 0 \\ a \cos v & 0 & -a \sin v \bar{k} \end{vmatrix} = \\ &= a^2 (-\sin^2 v \bar{e} - \sin v \cos v \bar{k}) = \\ &= -a \sin v (a \sin v \bar{e} + a \cos v \bar{k}). \end{aligned}$$

В скобках получился тот же вектор (7.11)! Это означает, что $\bar{N} \parallel \bar{r}$, т. е. нормаль параллельна радиус-вектору, которым в данном случае является радиус сферы. Подтверждается факт, известный из школьного курса геометрии: плоскость, касательная к сфере, перпендикулярна ее радиусу, проведенному в точку касания. Это уже любопытно, но важно другое. При $v = 0$ и $v = \pi$ будет $\bar{r}_u \times \bar{r}_v = 0$. В свое время мы исключили эти значения аргументов, так как в них «портится сеть». Теперь мы получили другое основание для исключения: не определяется нормаль и касательная плоскость. Впрочем, виновата здесь не сфера, а координатизация (ведь касательные плоскости и нормали можно построить и на полюсах).

2. Прямой геликоид. Уравнение

$$\bar{r}(u, v) = v \cos u \bar{i} + v \sin u \bar{j} + b u \bar{k}. \quad (7.12)$$

Производные:

$$\bar{r}_u = \bar{v} \bar{e}'(u) + b \bar{k}, \quad \bar{r}_v = \bar{e}(u).$$

Вектор нормали:

$$\bar{r}_u \times \bar{r}_v = \begin{vmatrix} \bar{e} & \bar{e}' & \bar{k} \\ 0 & v & b \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = b \bar{e}' - v \bar{k}.$$

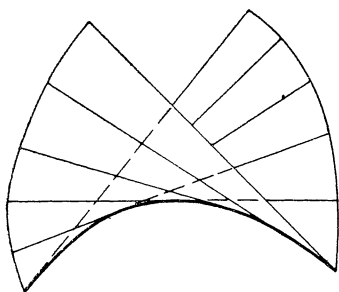


Рис. 68

Нормаль определена всюду, так как в силу $b \neq 0$, $\bar{e}' \neq 0$ при любых u и v никогда не будет $\bar{r}_u \times \bar{r}_v = 0$. Особых точек нет, хорошая поверхность, хорошая параметризация.

3. Торс (рис. 68). Эта поверхность (см. с. 121) состоит из точек, принадлежащих всем касательным к произвольной пространственной кривой. Зададим уравнение

этой кривой в виде

$$\rho = \rho(u),$$

причем под u будем понимать длину дуги, которую мы раньше обозначали s . Касательная будет иметь направление $\frac{d\bar{\rho}}{du} = \bar{\rho}'$. Тогда уравнение торса примет вид:

$$\bar{r} = \bar{\rho}(u) + v\bar{\rho}'(u), \quad (7.13)$$

где v — расстояние M^*M , взятое с соответствующим знаком.

Производные:

$$\bar{r}_u = \bar{\rho}'(u) + v\bar{\rho}''(u), \quad \bar{r}_v = \bar{\rho}'(u).$$

Нормаль:

$$\begin{aligned} \bar{r}_u \times \bar{r}_v &= (\bar{\rho}'(u) + v\bar{\rho}''(u)) \times \bar{\rho}'(u) = \\ &= \bar{\rho}'(u) \times \bar{\rho}'(u) + v\bar{\rho}''(u) \times \bar{\rho}'(u) = v\bar{\rho}''(u) \times \bar{\rho}'(u). \end{aligned}$$

Так как $\bar{\rho}'$ и $\bar{\rho}''$ зависят только от u , а v — скаляр, то направление нормали не зависит от v . При фиксированном u уравнение (7.13) дает прямую, а каждому значению v соответствует некоторая точка этой прямой. Значит, при всех $v \neq 0$, т. е. во всех точках этой прямой будет один и тот же вектор нормали, а следовательно, одна и та же касательная плоскость. Эту мысль можно выразить и так: торс есть поверхность, совокупность касательных плоскостей которой зависит только от одного параметра, а не от двух, как для других поверхностей.

Кроме того, ясно, что при $v=0$ нормаль не определена.

ОТ ОРТОГОНАЛЬНОЙ СЕТИ—К РЕПЕРУ ЛИНИИ НА ПОВЕРХНОСТИ

Еще в четвертой главе, говоря о пространственных кривых, мы отметили, как важно выбрать систему координат, связанную с устройством самой кривой, а не с какими-либо случайными обстоятельствами. Затем мы выяснили, что лучше всего сделать эту систему подвижной и поместить начало координат на саму кривую. В этом случае тройка взаимно перпендикулярных осей координат называется подвижным репером кривой. Если же направить векторы репера по касательной, по главной нормали и по бинормали, то такой репер является каноническим. Его деривационные формулы выглядят довольно просто, и коэффициентами в эти формулы входят инвариантные величины, имеющие почти очевидный геометрический смысл, — длина дуги кривой, ее кривизна и ее кручение.

Можно ли провести аналогичное построение для поверхностей? Очевидно, что и для поверхности можно поместить начало координат в рассматриваемую точку. Как выбрать векторы репера? Один инвариантный вектор уже есть — вектор нормали $\bar{N} = \bar{r}_u \times \bar{r}_v$. Правда, для репера нужен единичный вектор, а длина вектора \bar{N} может быть какой угодно. Но из этого положения выйти легко. Разделим вектор \bar{N} на его длину. Тогда вектор

$$\frac{\bar{N}}{|\bar{N}|} = \frac{\bar{r}_u \times \bar{r}_v}{|\bar{r}_u \times \bar{r}_v|}$$

будет единичным и вполне может служить вектором ка-

нонического репера. Пусть он выполняет роль третьего вектора, мы обозначим его \bar{e}_3 . Итак,

$$\bar{e}_3 = \frac{\bar{r}_u \times \bar{r}_v}{|\bar{r}_u \times \bar{r}_v|}.$$

Все получилось очень просто. Остальные два вектора должны быть перпендикулярны вектору \bar{e}_3 , т. е. лежать в касательной плоскости (рис. 69), точнее, быть параллельны ей. Но в касательной плоскости уже есть два известных нам вектора \bar{r}_u и \bar{r}_v — векторы касательных к координатным линиям. Однако использовать их в качестве векторов канонического репера нельзя: они в общем случае не ортогональны и не инвариантны.

Впрочем, пока все в наших руках. Направления векторов \bar{r}_u и \bar{r}_v зависят от выбора координатной сети на поверхности. Попробуем выбрать ее так, чтобы она оказалась ортогональной и инвариантной.

Начнем с первого требования — будем строить ортогональную сеть.

Отдельную линию на поверхности можно задать уравнением

$$v = v(u),$$

так как радиус-вектор $\bar{r} = \bar{r}(u, v(u))$ становится функцией одного переменного u , продолжая тем не менее указывать своим концом точки поверхности (рис. 70). Если же мы хотим задать сразу семейство линий, то следует положить

$$v = v(u, \alpha), \quad (8.1)$$

где α — вспомогательное переменное, каждому значению

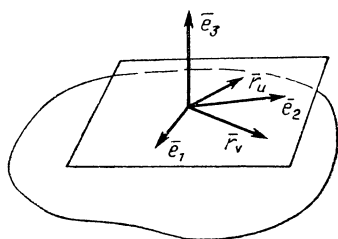


Рис. 69

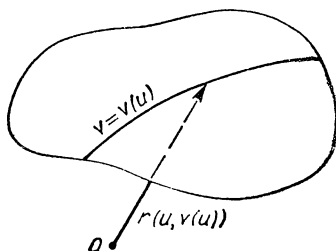


Рис. 70

α_0 которого соответствует новая линия на поверхности $\bar{r} = \bar{r}(u, v(u, \alpha_0))$ (рис. 71).

Уравнение (8.1) можно рассматривать как решение некоторого дифференциального уравнения

$$\frac{dv}{du} = \lambda(u, v), \quad (8.2)$$

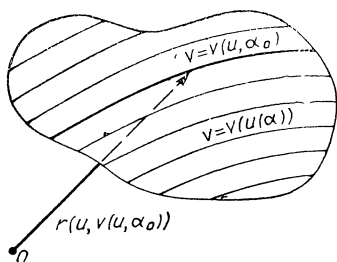


Рис. 71

так как решение такого уравнения зависит от одного произвольного постоянно-го. Строгое доказательство этого факта выходит за рамки школьного курса основ анализа, но простейшие примеры в нем имеются — это самые обыкновенные формулы интегрирования. Вспомните хотя бы такой пример:

$$\frac{dv}{du} = \cos u \Rightarrow v = \sin u + \alpha.$$

Если некоторое семейство линий на поверхности задано при помощи дифференциального уравнения (8.2), то и семейство, образующее с ним ортогональную сеть, можно искать в таком же виде:

$$\frac{dv}{du} = \mu(u, v). \quad (8.3)$$

Итак, считаем функцию $\lambda(u, v)$ известной, а функцию $\mu(u, v)$ — искомой. Будем рассматривать кусок поверхности, на котором линии (8.2) образуют такое семейство, что через каждую точку куска проходит по одной линии семейства, как на рисунке 71. Касательный вектор к линии (8.2) можно найти так:

$$\bar{t}_1 \parallel d\bar{r} = \bar{r}_u du + \bar{r}_v dv \parallel \bar{r}_u + \frac{dv}{du} \bar{r}_v = \bar{r}_u + \lambda(u, v) \bar{r}_v. \quad (8.4)$$

Аналогично для касательного вектора искомого семейства (8.3) получаем:

$$\bar{t}_2 \parallel \bar{r}_u + \mu(u, v) \bar{r}_v. \quad (8.5)$$

Условие ортогональности сети сводится к условию ортогональности векторов \bar{t}_1 и \bar{t}_2 . Это условие равносильно ортогональности правых частей выражений (8.4) и (8.5),

т. е. равенству нулю их скалярного произведения:

$$\bar{r}_u \cdot \bar{r}_u \cdot (\lambda + \mu) \cdot \bar{r}_u \cdot \bar{r}_v + \lambda \mu \bar{r}_v \cdot \bar{r}_v = 0. \quad (8.6)$$

Заметим, что величины

$$\bar{r}_u \cdot \bar{r}_u = E, \quad \bar{r}_u \cdot \bar{r}_v = F, \quad \bar{r}_v \cdot \bar{r}_v = G \quad (8.7)$$

зависят только от u и v , т. е. от точки поверхности (обозначения (8.7) введены Гауссом). Для того чтобы из (8.6) можно было найти $\mu(u, v)$, достаточно, чтобы оба коэффициента при нем не обращались в нуль одновременно. Но это условие выполнено, так как мы рассматриваем только такие поверхности, где $\bar{r}_u \neq 0$ и $\bar{r}_v \neq 0$.

Итак, по любому семейству (8.2) можно определить правильную ортогональную сеть, содержащую это семейство.

Поэтому всюду в главах VIII—IX мы будем считать, что координатная сеть на рассматриваемом куске поверхности ортогональна. Тогда $\bar{r}_u \perp \bar{r}_v$, т. е.

$$\bar{r}_u \cdot \bar{r}_v \equiv F = 0. \quad (8.8)$$

В двух из рассмотренных нами в предыдущей главе примерах координатная сеть уже была ортогональной, — в этом можно убедиться, проверив выполнение условия (8.8) для сферы и для прямого геликоида.

Для окончательного решения задачи о построении канонического репера поверхности необходимо найти такое семейство (8.2), которое является инвариантным. Однако пока не ясно, как же его искать.

В таких случаях математики предпочитают не идти напрямик, а остановиться и подробно исследовать возникшую ситуацию. Поступим так и мы, следуя в основном идее знаменитого французского геометра Гастона Дарбу (1842—1917) — автора капитального четырехтомного трактата по дифференциальной геометрии «Лекции по общей теории поверхностей», законченного в 1896 г.

Идея Дарбу состоит в том, чтобы оставить одно координатное семейство линий пока произвольным, как и саму поверхность, и все-таки выписать деривационные формулы и поискать инварианты. Он знал, что Гауссу удалось найти один важный инвариант в еще более трудных условиях, когда координатная сеть не была даже ортогональна!

Итак, положим

$$\bar{e}_1 \uparrow \uparrow \bar{r}_u, \quad \bar{e}_2 \uparrow \uparrow \bar{r}_v. \quad (8.9)$$

Тогда

$$\bar{r}_u = a\bar{e}_1, \quad \bar{r}_v = b\bar{e}_2, \quad (8.10)$$

где

$$a = \frac{1}{|\bar{r}_u|} > 0, \quad b = \frac{1}{|\bar{r}_v|} > 0.$$

Формулы (8.10) являются деривационными, так как они дают выражение первых производных вектора \bar{r} через декартов базис. Остальные деривационные формулы должны давать такие же выражения производных векторов базиса $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$. Для случая двух переменных получается два столбца деривационных формул, причем условия, вытекающие из ортогональности векторов базиса (см. табл. (4,5)), сохраняются для обоих столбцов. Таблица деривационных формул принимает вид:

$$\begin{array}{ll} \bar{r}_u = a\bar{e}_1; & \bar{r}_v = b\bar{e}_2; \\ \bar{e}_{1u} = \alpha_{12}\bar{e}_2 + \alpha_{13}\bar{e}_3; & \bar{e}_{1v} = \beta_{12}\bar{e}_2 + \beta_{13}\bar{e}_3; \\ \bar{e}_{2u} = -\alpha_{12}\bar{e}_1 + \alpha_{23}\bar{e}_3; & \bar{e}_{2v} = -\beta_{12}\bar{e}_1 + \beta_{13}\bar{e}_3; \\ \bar{e}_{3u} = -\alpha_{13}\bar{e}_1 - \alpha_{23}\bar{e}_2; & \bar{e}_{3v} = -\beta_{13}\bar{e}_1 - \beta_{23}\bar{e}_2. \end{array} \quad (8.11)$$

Прежде чем переходить к каким-либо геометрическим суждениям, поработаем средствами анализа — ведь дифференциалы были и остаются нашими главными помощниками.

В третьей главе мы вскользь упомянули о производных второго, третьего и т. д. порядка. Очевидно, можно говорить и о частных производных второго порядка. Нам понадобится в дальнейшем важная формула, относящаяся к таким производным:

$$f_{xy} = f_{yx}, \quad (8.12)$$

т. е. для любой функции $f(x, y)$ двух переменных вторые частные производные равны. Так как производные f_x и f_y суть пределы, то речь идет о перестановочности переходов к пределу. Ее, собственно, и утверждает формула (8.12), довольно тривиальное доказательство которой мы опустим.

Применим эту формулу к функции $\bar{r}(u, v)$, используя деривационные формулы (8.11). Получатся важные следствия. Имеем:

$$\begin{aligned}(\bar{r}_u)_v &= (a\bar{e}_1)_v = a_v\bar{e}_1 + a\bar{e}_{1v} = a_v\bar{e}_1 + a\beta_{12}\bar{e}_2 + a\beta_{13}\bar{e}_3, \\ (\bar{r}_v)_u &= (b\bar{e}_2)_u = b_u\bar{e}_2 + b\bar{e}_{2u} = -b\alpha_{12}\bar{e}_1 + b_u\bar{e}_2 + b\alpha_{23}\bar{e}_3.\end{aligned}$$

Эти два вектора в силу (8.12) равны, а следовательно равны и их координаты:

$$\begin{aligned}a_v &= -b\alpha_{12}, \\ b_u &= a\beta_{12}, \\ a\beta_{13} &= b\alpha_{23}.\end{aligned}\tag{8.13}$$

Эти три равенства, очевидно, должны иметь большое значение в общей теории поверхностей и, возможно, помогут выбрать канонический репер.

Однако нам сейчас полезно оставить на время аналитические выкладки и заняться геометрией.

Рассмотрим внимательно одно из координатных семейств ортогональной сети линий на поверхности. Вдоль каждой из его линий $v = \text{const}$, т. е. остается только одно переменное u . Заметим, что, пока не произведен инвариантный выбор ортогональной сети, линия $v = \text{const}$ является произвольной *линией на поверхности*.

Именно линию на поверхности мы и будем сейчас изучать. Для этого нового геометрического образа построенный нами репер является каноническим. В самом деле (рис. 72), вектор \bar{e}_1 направлен по касательной к рассмат-

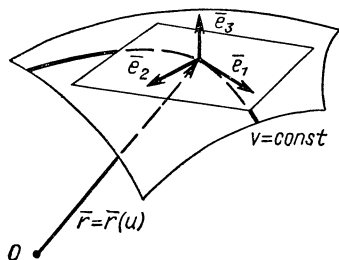


Рис. 72

риваемой линии $v = \text{const}$, \bar{e}_3 — по нормали к поверхности. Оба эти вектора полностью определены как только заданы и поверхность, и линия на ней. Вектор же \bar{e}_2 определяется однозначно обычным образом: $\bar{e}_2 = \bar{e}_3 \times \bar{e}_1$ (ср. с табл. (2.22)).

Деривационные формулы этого репера получаются из

формул левого столбца (8.11). Если считать $v = \text{const}$, то они примут вид:

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{r}}{du} &= a\bar{e}_1, \\ \frac{d\bar{e}_1}{du} &= \alpha_{12}\bar{e}_2 + \alpha_{13}\bar{e}_3, \\ \frac{d\bar{e}_2}{du} &= -\alpha_{12}\bar{e}_1 + \alpha_{23}\bar{e}_3, \\ \frac{d\bar{e}_3}{du} &= -\alpha_{13}\bar{e}_1 - \alpha_{23}\bar{e}_2.\end{aligned}$$

Поделим все эти формулы на $a = |\bar{r}_u| \neq 0$. Получим:

$$\begin{aligned}\frac{1}{a} \cdot \frac{d\bar{r}}{du} &= \bar{e}_1, \\ \frac{1}{a} \cdot \frac{d\bar{e}_1}{du} &= \frac{\alpha_{12}}{a} \bar{e}_2 + \frac{\alpha_{13}}{a} \bar{e}_3, \\ \frac{1}{a} \cdot \frac{d\bar{e}_2}{du} &= -\frac{\alpha_{12}}{a} \bar{e}_1 + \frac{\alpha_{23}}{a} \bar{e}_3, \\ \frac{1}{a} \cdot \frac{d\bar{e}_3}{du} &= -\frac{\alpha_{13}}{a} \bar{e}_1 - \frac{\alpha_{23}}{a} \bar{e}_2.\end{aligned}\tag{8.14}$$

Так как сейчас $a = a(u)$, то для линии на поверхности можно ввести новый параметр, положив

$$ds = a(u)du,$$

т. е.

$$s = \int_{u_0}^u a(u)du.$$

Таким образом, $s = s(u)$ и, наоборот, $u = u(s)$, а $\frac{du}{ds} = \frac{1}{a}$. По правилу дифференцирования сложной функции имеем:

$$\frac{d\bar{r}}{ds} = \frac{d\bar{r}}{du} \cdot \frac{du}{ds} = \frac{1}{a} \cdot \frac{d\bar{r}}{du}.$$

Пользуясь этой формулой для функций \bar{e}_1 , \bar{e}_2 , \bar{e}_3 и обозначив

$$\frac{\alpha_{12}}{a} = k_g, \quad \frac{\alpha_{13}}{a} = \nu, \quad \frac{\alpha_{23}}{a} = \kappa_g,$$

получим окончательные деривационные формулы канонического репера линии на поверхности:

$$\begin{aligned}\frac{dr}{ds} &= \bar{e}_1, \\ \frac{d\bar{e}_1}{ds} &= k_g \bar{e}_2 + v \bar{e}_3, \\ \frac{d\bar{e}_2}{ds} &= -k_g \bar{e}_1 + \kappa_g \bar{e}_3, \\ \frac{d\bar{e}_3}{ds} &= -v \bar{e}_1 - \kappa_g \bar{e}_2.\end{aligned}\quad (8.15)$$

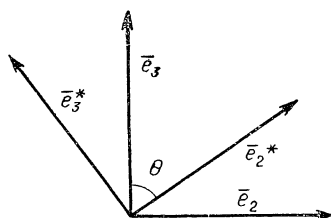


Рис. 73

Первая из этих формул в точности совпадает с первой из формул Френе (4.11). Поэтому s есть не что иное, как длина дуги нашей линии, и \bar{e}_1 — единичный вектор ее касательной. А вот векторы \bar{e}_2 и \bar{e}_3 формул (8.15) уже не совпадают с векторами формул Френе. Эти векторы самой линией не порождаются, они «приданы» ей поверхностью.

Нетрудно выяснить геометрическое значение инвариантов этого репера. Нам поможет сравнение их с инвариантами репера Френе. Во избежание путаницы векторы \bar{e}_2 и \bar{e}_3 репера Френе обозначим \bar{e}_2^* и \bar{e}_3^* . Тогда формулы Френе (4.11) примут вид:

$$\frac{d\bar{r}}{ds} = \bar{e}_1, \quad \frac{d\bar{e}_1}{ds} = k \bar{e}_2^*, \quad \frac{d\bar{e}_2^*}{ds} = -k \bar{e}_1 + \bar{e}_3^*, \quad \frac{d\bar{e}_3^*}{ds} = -\kappa \bar{e}_2^*. \quad (8.16)$$

Обозначим еще $\bar{e}_3, \bar{e}_2^* = \Theta$. Так как все четыре вектора $\bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_2^*, \bar{e}_3^*$ находятся в одной и той же плоскости, перпендикулярной к \bar{e}_1 , то (рис. 73)

$$\bar{e}_3^* = \cos \Theta \bar{e}_3 + \sin \Theta \bar{e}_2^*. \quad (8.17)$$

Следовательно,

$$k \bar{e}_2^* = k \cos \Theta \bar{e}_3 + k \sin \Theta \bar{e}_2,$$

где k — обычная кривизна кривой. С другой стороны,

$$\frac{d\bar{e}_1}{ds} = k_g \bar{e}_2 + v \bar{e}_3. \quad (8.18)$$

В силу второй из формул (8.16) левые части двух последних формул равны. Значит, равны и правые:

$$k_g \bar{e}_2 + v \bar{e}_3 = k \cos \Theta \bar{e}_3 + k \sin \Theta \bar{e}_2.$$

Отсюда и вытекает (равенство векторов влечет за собой равенство координат) геометрическое значение инвариантов k_g и v :

$$k_g = k \sin \Theta, \quad v = k \cos \Theta, \quad (8.19)$$

т. е. k_g и v получаются из обычной кривизны умножением на $\sin \Theta$ и $\cos \Theta$. Угол Θ можно трактовать, как угол между нормалью поверхности и главной (т. е. той, что лежит в соприкасающейся плоскости) нормалью кривой. Иногда вектор

$$\frac{d\bar{e}_1}{ds} = \frac{d^2\bar{r}}{ds^2} = k\bar{e}_2$$

называют *вектором кривизны*. В силу (8.18) k_g можно считать его проекцией на касательную плоскость (ибо \bar{e}_2 лежит в этой плоскости), а v — проекцией на нормаль. Между прочим, v так и называют *нормальной кривизной* или говорят, что $v\bar{e}_3$ есть нормальная составляющая вектора кривизны. Тогда k_g надо было бы называть касательной кривизной, но это словосочетание не очень удобно и его заменили термином *геодезическая кривизна* (отсюда и значок g — geodesique, геодезический), что напоминает о связи между геодезией (наукой об измерениях на поверхности Земли) и дифференциальной геометрией.

Что касается третьего инварианта κ_g , то следует ожидать, что он как-то связан с кручением нашей линии. Эту связь легко найти, продифференцировав равенство (8.17), причем для левой части надо воспользоваться формулами (8.16), а для правой — формулами (8.15). Учтем также, что угол Θ тоже зависит от s . Опустив выкладки, запишем результат:

$$\kappa_g = \kappa - \frac{d\Theta}{ds}. \quad (8.20)$$

Он и дает геометрическое значение третьего инварианта: коэффициент κ_g равен разности между кручением линии и производной угла Θ по длине дуги. Называется же этот инвариант геодезическим кручением.

Итак, как говорят геометры, все инварианты линии на поверхности «геометрически охарактеризованы». Интересно выяснить, что получится при обращении в нуль того или иного из них.

Рассмотрим натуральное уравнение

$$v = 0.$$

Обратимся ко второй из формул (8.19). Если линия не прямая, т. е. $k \neq 0$, то $\cos \Theta = 0$. Это значит, что

(рис. 73) $\vec{e}_2 \parallel \vec{e}_3$ и соприкасающаяся плоскость кривой совпадает с касательной плоскостью поверхности. Такая линия на поверхности называется *асимптотической*.

Теперь рассмотрим натуральное уравнение

$$k_g = 0.$$

По первой из формул (8.19), если опять-таки линия не прямая, получим $\sin \Theta = 0$, т. е. $\vec{e}_3 \parallel \vec{e}_2^*$ (см. тот же рисунок). Это значит, что соприкасающаяся плоскость кривой содержит нормаль поверхности и, следовательно, перпендикулярна плоскости, касательной к поверхности. Такая линия на поверхности называется *геодезической*.

И наконец, обратимся к натуральному уравнению

$$\kappa_g = 0.$$

В силу последней из формул (8.15) это уравнение означает: $d\vec{e}_3 \parallel \vec{e}_1$. А так как $\vec{e}_1 \parallel d\vec{r}$, то уравнение $\kappa_g = 0$ дает такое свойство линии на поверхности: $d\vec{e}_3 \parallel d\vec{r}$, т. е.

дифференциал нормали к поверхности параллелен касательной к кривой. Эта на первый взгляд не очень простая характеристика выделяет самый важный для нас класс линий на поверхности — *линии кривизны*. Чем они важны и почему так названы, мы скоро узнаем, а пока пора остановиться и осмотреться.

Что мы имеем? Канонический репер линии на поверхности, три его инварианта k_g , ν , κ_g и три класса линий, выделенных с помощью последовательного обращения в нуль этих инвариантов: *асимптотические линии*, *геодезические линии* и *линии кривизны*.

Однако построенный нами репер, если его рассматривать как репер поверхности, не является ее каноническим репером, ибо семейство линий $\nu = \text{const}$ произвольно и, следовательно, не инвариантно. Такой репер мы будем называть *полуканоническим* репером поверхности. Его деривационные формулы — (8.11).

Как же из этого репера получить канонический? Вероятно, если принять семейство линий, принадлежащих одному из трех уже известных нам классов, за координатное, то мы и получим канонический репер поверхности. Какой из этих классов выбрать, будем искать, идя методом «проб и ошибок», ибо в этом случае уже «по дороге» мы узнаем немало важного и интересного.

ОТ ЛИНИЙ НА ПОВЕРХНОСТИ—К КАНОНИЧЕСКОМУ РЕПЕРУ

Деривационные формулы линии на поверхности дают нам три простейших натуральных уравнения: $k_g = 0$, $v = 0$ и $\kappa_g = 0$. Они определяют важнейшие геометрически инвариантные линии на поверхности. Наша задача состоит в том, чтобы провести анализ этих уравнений и определяемых ими линий. Конечная цель — выбрать из них те, которые приведут к канонизации репера поверхности.

Начнем с асимптотических линий. Мы уже знаем их натуральное уравнение $v = 0$. Но линию на поверхности можно задавать не только натуральными уравнениями. Пусть поверхность отнесена к некоторому полуканоническому реперу, для которого имеют место деривационные формулы (8.14). Произвольную линию на поверхности можно задать (см. гл. VI) в виде:

$$\begin{aligned} u &= u(t), \\ v &= v(t). \end{aligned} \quad (9.1)$$

Эта линия будет асимптотической, если ее соприкасающаяся плоскость совпадает с касательной плоскостью поверхности, — таково определяющее свойство асимптотической линии (см. гл. VIII).

Соприкасающаяся же плоскость определяется двумя векторами $\frac{d\bar{r}}{dt}$ и $\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}$ (см. гл. IV, уравнение (4.10)).

Вычислим их для линии (9.1), пользуясь правилом дифференцирования сложной функции (см. формулу (3.12)). Получим:

$$\frac{d\bar{r}(u(t), v(t))}{dt} = \bar{r}_u \frac{du}{dt} + \bar{r}_v \frac{dv}{dt}, \quad (9.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left(\bar{r}_u \frac{du}{dt} + \bar{r}_v \frac{dv}{dt} \right) = \left(\bar{r}_{uu} \frac{du}{dt} + \bar{r}_{uv} \frac{dv}{dt} \right) \frac{du}{dt} + \\ &+ \bar{r}_u \frac{d^2 u}{dt^2} + \left(\bar{r}_{vu} \frac{du}{dt} + \bar{r}_{vv} \frac{dv}{dt} \right) \frac{dv}{dt} + \bar{r}_v \frac{d^2 v}{dt^2}. \end{aligned} \quad (9.3)$$

Так как касательная плоскость определяется векторами \bar{r}_u и \bar{r}_v , то в силу совпадения ее с соприкасающейся плоскостью четыре вектора $\frac{d\bar{r}}{dt}$, $\frac{d^2 \bar{r}}{dt^2}$, \bar{r}_u и \bar{r}_v должны быть компланарны. Из (9.2) видно, что вектор $\frac{d\bar{r}}{dt}$ компланарен с \bar{r}_u и \bar{r}_v . Остается потребовать того же для $\frac{d^2 \bar{r}}{dt^2}$. Это дает

$$\frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} (\bar{r}_u \times \bar{r}_v) = 0. \quad (9.4)$$

Подставляя (9.3) в (9.4), получим (члены $\bar{r}_u \frac{d^2 u}{dt^2}$ и $\bar{r}_v \frac{d^2 v}{dt^2}$ при умножении на $\bar{r}_u \times \bar{r}_v$ дадут нули), что для нашей линии имеет место дифференциальное уравнение

$$\left(\bar{r}_{uu} \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2\bar{r}_{uv} \frac{du}{dt} \cdot \frac{dv}{dt} + \bar{r}_{vv} \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 \right) \cdot (\bar{r}_u \times \bar{r}_v) = 0.$$

Это уравнение можно записать короче, используя то обстоятельство, что по определению для вектора нормали

$$\bar{e}_3 \parallel \bar{r}_u \times \bar{r}_v.$$

Обозначим

$$\bar{r}_{uu} \cdot \bar{e}_3 = L, \quad \bar{r}_{uv} \cdot \bar{e}_3 = M, \quad \bar{r}_{vv} \cdot \bar{e}_3 = N.$$

Тогда наше уравнение примет вид:

$$L \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2M \frac{du}{dt} \cdot \frac{dv}{dt} + N \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 = 0. \quad (9.5)$$

Это дифференциальное уравнение асимптотических линий. Чтобы легче разобраться в нем, возьмем в качестве вспомогательного переменного t одно из переменных u или v , т. е. запишем уравнения (9.1) в таком виде:

$$\begin{aligned} u &= t, \\ v &= v(t) = v(u). \end{aligned}$$

Тогда $\frac{du}{dt} = 1$, и уравнение асимптотических линий примет вид:

$$L + 2M \frac{dv}{du} + N \left(\frac{dv}{du} \right)^2 = 0. \quad (9.6)$$

Решая его как квадратное относительно $\frac{dv}{du}$ и принимая $N \neq 0$, получаем:

$$\frac{dv}{du} = \frac{-M \pm \sqrt{M^2 - LN}}{N}. \quad (9.7)$$

Но если дискриминант $M^2 - LN$ уравнения (9.6) окажется меньше нуля, то правая часть уравнения (9.7) станет мнимой, решать это дифференциальное уравнение нет смысла и никаких асимптотических линий нет. Может ли быть $M^2 - LN < 0$? Обратимся к нашим примерам. Для сферы

$$\bar{r}(u, v) = a \sin v \bar{e}(u) + a \cos v \cdot \bar{k}.$$

Первые производные мы уже находили (см. гл. VII): $\bar{r}_u = a \sin v \bar{e}'$, $\bar{r}_v = a \cos v \bar{e} - a \sin v \bar{k}$. Дифференцируя их, получаем:

$$\begin{aligned} \bar{r}_{uu} &= a \sin v \bar{e}'' = -a \sin v \bar{e}, \\ \bar{r}_{uv} &= a \cos v \bar{e}', \\ \bar{r}_{vv} &= -a \sin v \bar{e} - a \cos v \bar{k} = -\bar{r}. \end{aligned}$$

Ранее мы установили, что для сферы $\bar{e}_3 \parallel \bar{r}_z$ т. е. можно написать:

$$\bar{e}_3 = q \bar{r},$$

не уточняя пока значения скаляра q .

Тогда

$$\begin{aligned} L &= q (\bar{r}_{uu} \cdot \bar{r}) = -qa^2 \sin^2 v, \\ M &= q (\bar{r}_{uv} \cdot \bar{r}) = 0, \\ N &= q (\bar{r}_{vv} \cdot \bar{r}) = -qa^2. \end{aligned}$$

Поэтому

$$M^2 - LN = -q^2 a^4 \sin^2 v > 0$$

(напомним, что точки, где $v = 0$ и $v = \pi$, не рассматриваются).

Итак, на сфере асимптотических линий нет. Но, может быть, сфера — исключение? Легко догадаться, что если сферу подвергнуть очень небольшому преобразованию — например, превратить ее в эллипсоид вращения, подобный земной поверхности, — то непрерывная функция $M^2 - LN$ тоже изменится незначительно и сохранит свой знак. В этом можно убедиться вычислением, но пусть читатель нам поверит. Итак, существует обширный класс поверхностей, не имеющих асимптотических линий. Значит, для построения канонического репера любой поверхности эти линии не годятся.

И все-таки обратим внимание на уравнение (9. 7) при $M^2 - LN > 0$. Сокращенно его можно записать в виде:

$$\frac{dv}{du} = f_1(u, v) \pm f_2(u, v). \quad (9.8)$$

Таким образом, мы имеем два совершенно различных уравнения относительно одной неизвестной функции $v = v(u)$. Каждое из них будет иметь, как мы уже знаем, решение, зависящее от одной произвольной постоянной C :

$$v = \varphi(u, C). \quad (9.9)$$

Эту постоянную всегда можно выбрать так, чтобы выполнялось равенство

$$v_0 = \varphi(u_0, C).$$

Тогда через точку (v_0, u_0) поверхности будет проходить только одна из линий (9. 9) и, следовательно, две линии, определяемые уравнением (9. 8). Иными словами, множество всех решений уравнения (9. 7) при условии $M^2 - LN > 0$ будет образовывать сеть линий на поверхности и в некоторой окрестности данной точки эта сеть будет правильной. Поэтому про уравнение (9. 5) говорят, что оно определяет (при $M^2 - LN > 0$) *асимптотическую сеть*. Уравнение этой сети часто пишут в виде:

$$Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 = 0, \quad (9. 10)$$

чтобы подчеркнуть равноправие переменных u и v (выполнено умножение на общий знаменатель $(dt)^2$ в уравнении (9. 5)).

Обратимся теперь к геодезическим линиям. Натуральное уравнение таких линий имеет вид: $k_g = 0$. Чтобы получить их дифференциальное уравнение, вспомним свойство, определяющее геодезическую линию: сопри-

касающаяся плоскость содержит нормаль поверхности.

Это значит, что векторы $\frac{d\bar{r}}{dt}$, $\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}$ и \bar{e}_3 компланарны, т. е.

$$\frac{d\bar{r}}{dt} \cdot \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} \cdot \bar{e}_3 = 0. \quad (9.11)$$

Для вычисления этого смешанного произведения придется расписать первые два вектора по базису $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ полуканонического репера. Так как из деривационных формул (8. 11) известно, что $\bar{r}_u = a\bar{e}_1$ и $\bar{r}_v = b\bar{e}_2$, то для вектора $\frac{d\bar{r}}{dt}$ по формуле (9. 2) получаем:

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = a \frac{du}{dt} \bar{e}_1 + b \frac{dv}{dt} \bar{e}_2.$$

Обозначим временно

$$\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = A_1\bar{e}_1 + A_2\bar{e}_2 + A_3\bar{e}_3. \quad (9.12)$$

Тогда уравнение (9. 11) примет вид:

$$\begin{vmatrix} a \frac{du}{dt} & b \frac{dv}{dt} & 0 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$aA_2 \frac{du}{dt} - bA_1 \frac{dv}{dt} = 0. \quad (9.13)$$

Значит, коэффициент A_3 вычислять не надо. Обратимся к выражению (9. 3). В его правой части есть три вторые производные, которые и надо выразить через базис $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$. Подсчитаем (не уточняя коэффициентов при \bar{e}_3 !) при помощи деривационных формул (8. 11) вторые производные функции \bar{r} :

$$\begin{aligned} \bar{r}_{uu} &= \frac{\partial}{\partial u} \bar{r}_u = \frac{\partial}{\partial u} a\bar{e}_1 = a_u\bar{e}_1 + a(\alpha_{12}\bar{e}_2 + \alpha_{13}\bar{e}_3) = \\ &= a_u\bar{e}_1 + a\alpha_{12}\bar{e}_2 + \dots \\ \bar{r}_{uv} &= \frac{\partial}{\partial v} \bar{r}_u = \frac{\partial}{\partial v} a\bar{e}_1 = a_v\bar{e}_1 + a(\beta_{12}\bar{e}_2 + \beta_{13}\bar{e}_3) = \\ &= a_v\bar{e}_1 + a\beta_{12}\bar{e}_2 + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{r}_{vv} &= \frac{\partial}{\partial v} \bar{r}_v = \frac{\partial}{\partial v} b \bar{e}_2 = b_v \bar{e}_2 + b(-\beta_{12} \bar{e}_2 + \beta_{13} \bar{e}_3) = \\ &= -b\beta_{12} \bar{e}_1 + b_v \bar{e}_2 + \dots\end{aligned}$$

Теперь положим

$$u = t, \quad v = v(t) = v(u).$$

Тогда $\frac{du}{dt} = 1$, $\frac{d^2u}{dt^2} = 0$ и сравнение (9.3) и (9.12) дает:

$$\begin{aligned}A_1 &= a_u + 2a_v \frac{dv}{du} - b\beta_{12} \left(\frac{dv}{du}\right)^2, \\ A_2 &= b \frac{d^2v}{du^2} + a\alpha_{12} + 2b\beta_{12} \frac{dv}{du} + b_v \left(\frac{dv}{du}\right)^2.\end{aligned}$$

Теперь (9.13) примет вид:

$$aA_2 - bA_1 \frac{dv}{du} = 0,$$

или подробнее:

$$\begin{aligned}ab \frac{d^2v}{du^2} + ab_v \left(\frac{dv}{du}\right)^2 + 2ab\beta_{12} \frac{dv}{du} + a^2\alpha_{12} - ba_u \frac{dv}{du} - \\ - 2ba_v \left(\frac{dv}{du}\right)^2 - b^2\beta_{12} \left(\frac{dv}{du}\right)^2 = 0.\end{aligned}$$

Используя выражение для β_{12} из формул (8.13) и деля на $ab \neq 0$, окончательно получаем дифференциальное уравнение геодезических линий:

$$\begin{aligned}\frac{d^2v}{du^2} - \left(\frac{dv}{du}\right)^3 \frac{bb_u}{a^2} + \left(\frac{dv}{du}\right)^2 (ab_v - 2ba_v) + \\ + \frac{dv}{du} \left(2\frac{b_u}{a} - \frac{a_u}{a}\right) - \frac{aa_v}{b} = 0.\end{aligned}\quad (9.14)$$

Это уравнение позволяет сделать многие важные выводы.

Прежде всего, в отличие от дифференциального уравнения (9.6) асимптотических линий оно второго порядка, т. е. содержит вторую производную искомой функции $v = v(u)$. В общей теории дифференциальных уравнений доказывается, что решение такого уравнения зависит уже не от одной, а от двух произвольных постоянных, т. е. имеет вид:

$$v = \varphi(u, C_1, C_2). \quad (9.15)$$

Если мы зададим значение v_0 и u_0 , т. е. координаты одной точки на поверхности, то C_1 и C_2 будут связаны одним соотношением:

$$v_0 = \varphi(u_0, C_1, C_2). \quad (9.16)$$

Отсюда следует, что имеется бесконечное множество геодезических линий, проходящих через фиксированную точку поверхности. Чтобы узнать, как они расположены, продифференцируем уравнение (9.15). Получим:

$$\frac{dv}{du} = \varphi_u(u, C_1, C_2).$$

Если мы дадим функции $\frac{dv}{du}$ некоторое значение w_0 , соответствующее координате $u = u_0$, то для вычисления C_1 и C_2 получится второе соотношение:

$$\left. \frac{dv}{du} \right|_{u=u_0, v=v_0} = w_0 = \varphi_u(u_0, C_1, C_2). \quad (9.17)$$

Значит, если заданы числа u_0, v_0, w_0 , то из (9.16) и (9.17) находятся C_1 и C_2 (конечно, в общем случае, особенности возможны и тут, но мы их исключаем). Таким образом, уравнение (9.14) будет иметь единственное решение, удовлетворяющее условиям (9.16) и (9.17).

Условие (9.16) означает фиксацию точки $M_0(u_0, v_0)$ на поверхности. А что означает условие (9.17)? Найдем вектор касательной к геодезической линии, проходящей через точку M_0 , т.е. вектор

$$\left. \frac{d\vec{r}}{du} \right|_{u=u_0, v=v_0} = \vec{r}_u(u_0, v_0) + \frac{dv}{du} \Big|_{u=u_0, v=v_0} \vec{r}_v(u_0, v_0).$$

Так как $\left. \frac{dv}{du} \right|_{v=v_0, u=u_0} = w_0$, то условие (9.17)

означает задание направления касательной. В касательной плоскости точки мы можем задать любое направление и найдется геодезическая линия, проходящая через эту точку и касающаяся этого направления (рис. 74). Ясно, что при помощи геодезической линии мы не можем выделить никакого инвариантного направления на поверх-

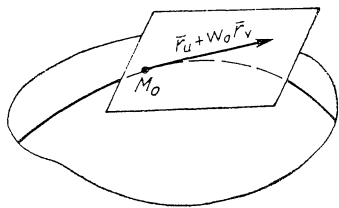


Рис. 74

ности, а следовательно, и построить канонический репер.

Но это не значит, что геодезические линии «никуда не годятся». Уже тот факт, что все коэффициенты и их уравнения (9.14) зависят только от коэффициентов (и их производных) деривационных формул $\bar{r}_u = a\bar{e}_1$, $\bar{r}_v = b\bar{e}_2$ и не содержат коэффициентов остальных деривационных формул (8.11), заставляет предполагать нечто интересное. Но мы пока расстаемся с геодезическими линиями, так как нам необходимо продолжить поиск линий, годных для построения канонического репера.

Как говорят спортсмены, у нас осталась еще одна попытка: выяснить, не годятся ли для построения канонического репера линии кривизны, т. е. линии $\kappa_g = 0$. Они характеризуются тем, что вдоль них

$$d\bar{r} \parallel d\bar{e}_3.$$

Пользуясь деривационными формулами (8.11), запишем эти дифференциалы так:

$$\begin{aligned} d\bar{r} &= \bar{r}_u du + \bar{r}_v dv = a\bar{e}_1 du + b\bar{e}_2 dv, \\ d\bar{e}_3 &= (-\alpha_{13}\bar{e}_1 - \alpha_{23}\bar{e}_2) du + (-\beta_{13}\bar{e}_1 - \beta_{23}\bar{e}_2) dv. \end{aligned}$$

Условие параллельности дает:

$$\frac{\alpha_{13} du + \beta_{13} dv}{a du} = \frac{\alpha_{23} du + \beta_{23} dv}{b dv},$$

или

$$a\alpha_{23} (du)^2 + (a\beta_{23} - b\alpha_{13}) dudv - b\beta_{13} (dv)^2 = 0. \quad (9.18)$$

Сравнивая это уравнение с уравнением асимптотических линий (9.5), мы заключаем, что линии кривизны тоже образуют сеть. Теперь учтем, что в силу (8.13)

$$\beta_{13} = \frac{b}{a} \alpha_{23}. \quad (9.19)$$

Вычисляя дискриминант уравнения (9.18), рассматриваемого как квадратное относительно $\frac{dv}{du}$, получаем:

$$\begin{aligned} (a\beta_{23} - b\alpha_{13})^2 + 4aba\alpha_{23} \frac{b}{a} \alpha_{23} &= (a\beta_{23} - b\alpha_{13})^2 + \\ &+ 4b^2\alpha_{23}^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Это выражение обращается в нуль только при $\alpha_{23} = a\beta_{23} - b\alpha_{13} = \beta_{13} = 0$, т. е. для очень частного

класса поверхностей, для которого уравнение (9.18) обращается в тождество. Все линии на такой поверхности (позднее мы узнаем, что это сфера) обладают свойством линий кривизны, но из них все-таки можно выбрать ортогональную сеть.

Как бы то ни было, сеть линий $\kappa_g = 0$ существует на любой поверхности. Примем одно из семейств этой сети за линию $v = \text{const}$. Тогда уравнение (9.18) должно обратиться в тождество при $\alpha_{23} = 0$. Но тогда в силу (9.19) будет $\beta_{13} = 0$ и уравнение (9.18) (после сокращения на $a\beta_{23} - b\alpha_{13} \neq 0$) принимает вид:

$$dudv = 0.$$

Значит, второе семейство линий кривизны тоже становится координатным, т. е. семейством $u = \text{const}$. Следовательно, сеть линий кривизны всегда образует ортогональную сеть. Это то, что нам надо. Принимая линии кривизны за координатные линии, мы получаем канонический репер. Его деривационные формулы получаются из (8.11), если учесть (8.13) и то, что теперь

$$\alpha_{23} = \beta_{13} = 0.$$

Так как коэффициентов теперь осталось мало, то можно расстаться с индексными обозначениями и вместо α_{13} и β_{23} писать буквы A и B :

$$\alpha_{13} = A, \quad \beta_{23} = B.$$

Итак, выпишем деривационные формулы канонического репера поверхности:

$$\begin{aligned} \bar{r}_u &= a\bar{e}_1, & \bar{r}_v &= b\bar{e}_2, \\ \bar{e}_{1u} &= -\frac{a_v}{b}\bar{e}_2 + A\bar{e}_3, & \bar{e}_{1v} &= \frac{b_u}{a}\bar{e}_2, \\ \bar{e}_{2u} &= \frac{a_v}{b}\bar{e}_1, & \bar{e}_{2v} &= -\frac{b_u}{a}\bar{e}_1 + B\bar{e}_3, \\ \bar{e}_{3u} &= -A\bar{e}_1, & \bar{e}_{3v} &= -B\bar{e}_2. \end{aligned} \quad (9.20)$$

Как и следовало ожидать, они стали значительно проще: в них входят всего четыре функции: a , b , A , B .

Геометрическое значение векторов этого канонического репера нам хорошо известно: \bar{e}_1 и \bar{e}_2 касаются линий кривизны в точке поверхности, \bar{e}_3 — нормаль (рис. 75).

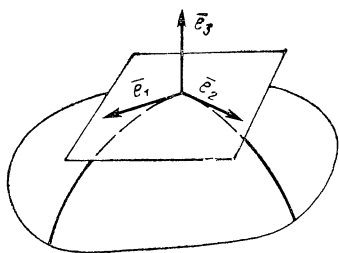


Рис. 75

Теперь следовало бы выяснить геометрическое значение коэффициентов деривационных формул, которые должны образовывать полную систему инвариантов... Но стоп! Эти коэффициенты неинвариантны ибо у нас неинвариантны параметры u и v . Легко догадаться, как получить инварианты, исходя из известных нам геометрических фактов.

Вернемся к формулам (8.15). Положив в них $\kappa_g = 0$, мы получим деривационные формулы канонического репера линии $v = \text{const}$ (т. е. линии кривизны):

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{r}}{ds} &= \bar{e}_1, \\ \frac{d\bar{e}_1}{ds} &= k_g \bar{e}_2 + v \bar{e}_3, \\ \frac{d\bar{e}_2}{ds} &= -k_g \bar{e}_1, \\ \frac{d\bar{e}_3}{ds} &= -v \bar{e}_1.\end{aligned}\tag{9.21}$$

Сравнив (9.20) и (9.21), получим, что величины $-\frac{av}{ab}$ и $\frac{A}{a}$ являются геодезической и нормальной кривизнами линии кривизны $v = \text{const}$. Совершенно аналогично получается, что $\frac{bu}{ab}$ и $\frac{B}{b}$ суть геодезическая и нормальная кривизны второй линии кривизны $u = \text{const}$. Итак, имеем четыре инварианта поверхности:

$$\begin{aligned}I_1 &= -\frac{av}{ab} = k_g |_{v=\text{const}}, \\ I_2 &= \frac{bu}{ab} = k_g |_{u=\text{const}}, \\ I_3 &= \frac{A}{a} = v |_{v=\text{const}}, \\ I_4 &= \frac{B}{b} = v |_{u=\text{const}},\end{aligned}\tag{9.22}$$

которые и составляют искомую полную систему инвариантов поверхности.

Эти инварианты, в отличие от инвариантов кривой (см. гл. V), не могут быть произвольными функциями двух переменных, ибо над ними тяготеют дополнительные соотношения, которые получаются из деривационных формул (9.20) так же, как мы получили соотношения (8.13) из формул (8.10).

Этих соотношений всего три, хотя можно было бы ожидать и девять: ведь пара формул (8.10), т. е. первая пара формул (8.11), дала три соотношения. В истории геометрии поиски этих соотношений затянулись надолго. Одно из них было найдено еще Гауссом, когда он получил свою «превосходную теорему» (1828 г.), а два других связывают с именем итальянского математика Дельфино Кодаци (1824—1973), нашедшего их в 1868 г. Однако фактически они были найдены еще раньше его соотечественником Анджело Майнард (1800—1879), записавшим их в другом виде в 1856 г. Но еще ранее, в 1853 г., их вывел наш соотечественник Карл Михайлович Петерсон (1828—1881) в своей магистерской диссертации, защищенной в Тарту. Эта диссертация оставалась неизвестной математикам всего мира до 1952 г., когда ее нашел и опубликовал советский историк математики Иван Яковлевич Демман, возможно известный нашему читателю как популяризатор науки. Почему сам Петерсон не придал значения этим результатам и не опубликовал их, остается загадкой. Ведь он являлся автором большого числа работ по дифференциальной геометрии и теории дифференциальных уравнений, печатавшихся в первом русском математическом журнале «Математический сборник»¹. Он получил также и докторскую степень «*Honoris causa*»².



К. М. Петерсон

¹ Этот журнал издается с 1866 г. по настоящее время.

² Т. е. без официальной защиты диссертации.

Вот так эти уравнения получаются из деривационных формул (9.20). Имеем:

$$(\bar{e}_{3u})_v = -A_v \bar{e}_1 - A \bar{e}_{1v} = -A_v \bar{e}_1 - \frac{Ab_u}{a} \bar{e}_2.$$

С другой стороны,

$$(\bar{e}_{3v})_u = -B_u \bar{e}_2 - B \bar{e}_{2u} = -B \frac{a_v}{b} \bar{e}_1 - B_u \bar{e}_2.$$

Сравнивая координаты этих двух равных векторов, получаем:

$$\begin{aligned} A_v &= \frac{B}{b} a_v, \\ B_u &= \frac{A}{a} b_u. \end{aligned} \quad (9.23)$$

Далее имеем:

$$(\bar{e}_{1u})_v = -\left(\frac{a_v}{b}\right)_v \bar{e}_2 - \frac{a_v}{b} \left(-\frac{b_u}{a} \bar{e}_1 + B \bar{e}_3\right) + A_v \bar{e}_3 - AB \bar{e}_2$$

и

$$(\bar{e}_{1v})_u = \left(\frac{b_u}{a}\right)_u \bar{e}_2 + \frac{b_u}{a} \cdot \frac{a_v}{b} \bar{e}_1.$$

В силу (9.23) коэффициент при \bar{e}_3 у первого вектора равен нулю. Коэффициенты при \bar{e}_1 у обоих векторов равны между собой тождественно. Только сравнение коэффициентов при \bar{e}_2 дает новое соотношение:

$$-AB - \left(\frac{a_v}{b}\right)_v = \left(\frac{b_u}{a}\right)_u. \quad (9.24)$$

Так как вектор \bar{e}_2 совершенно равноправен с \bar{e}_1 , то следует ожидать, что из равенства $(\bar{e}_{2u})_v = (\bar{e}_{2v})_u$ мы не получим ничего нового,—недоверчивый читатель может убедиться в этом сам. Уравнения (9.23) называются теперь *уравнениями Петерсона-Кодацци*, а уравнение (9.24)—*уравнением Гаусса*.

Выпишем их еще раз в более удобном виде:

$$\begin{aligned} A_v \cdot b &= B a_v, \\ B_u \cdot a &= A b_u, \\ \left(\frac{a_v}{b}\right)_v + \left(\frac{b_u}{a}\right)_u + AB &= 0 \end{aligned} \quad (9.25)$$

и будем называть *основными уравнениями теории поверхностей*.

Итак, канонический репер и соответствующий аналитический аппарат построены.

Но у читателя может возникнуть желание узнать еще что-то о линиях кривизны: ведь их геометрическая характеристика (вдоль линий кривизны $\bar{d}\bar{r} \parallel d\bar{e}_3$) была не очень изящной.

Другое, очень эффектное свойство линий кривизны нашел еще Гаспар Монж в работе, опубликованной в 1784 г. под названием «Мемуар о насыпях и выемках». По названию можно подумать, что это чисто прикладная работа, но фактически мемуар посвящен вопросам теории. Речь идет о наилучшем способе транспортировки масс земли. Монж рассматривает случай, когда каждая частица земли перемещается по прямой линии так, что возникает совокупность прямых линий, зависящая от двух переменных. Такую совокупность легко представить себе, если через каждую точку некоторого куска поверхности $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$ провести прямую, обеспечив при этом непрерывность и дифференцируемость вектор-функции $\bar{l}(u, v)$ в уравнении прямой

$$\bar{R} = \bar{r}(u, v) + \lambda \bar{l}(u, v).$$

В самом грубом приближении эту картину мы можем наблюдать во время прогулки в лесу, если встретим ежа: через каждую точку его шкурки проходит одна иголка (прямая!).

Однако в науку такие семейства прямых, названные конгруэнциями, пришли не из живой природы и не из строительной техники, а через геометрическую оптику. Знаменитый французский физик Этьенн Луи Малюс (1775—1812) был учеником Монжа в политехнической школе, но стал не математиком, а специалистом по оптике, автором большого числа книг и статей по теории преломления и отражения световых лучей. Ему, в частности, принадлежит открытие явления поляризации света при прохождении через некоторые кристаллы. Математикам Э. Малюс известен как исследователь нормальной конгруэнции, т. е. совокупности нормалей к произвольной поверхности. Такую конгруэнцию мы получим, если в приведенном выше уравнении векторы

l станут нормальными поверхности $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$ (еж рассердился и иголки на его шкурке стали перпендикулярны касательным плоскостям).

Почему Малюса заинтересовали такие конгруэнции? Эксперимент показал, что лучи, исходящие из порождающей свет поверхности, всегда перпендикулярны ей, т. е. являются ее нормальными. Таким образом, поток света первоначально является нормальной конгруэнцией. Что произойдет с этим потоком при отражениях и преломлениях? Малюс обосновал предположение, что конгруэнция световых лучей будет оставаться нормальной. Теперь этот результат называется теоремой Малюса — Дюпена, так как строгое доказательство этому факту нашел другой ученик Монжа — знаменитый геометр Шарль Франсуа Дюпен (1784 — 1873), занимавший, впрочем, видные должности в морском ведомстве Франции. Подобное «совместительство» характерно для воспитанников такого разностороннего ученого и политического деятеля, как Монж.

Дюпен известен еще и тем, что он открыл и подробно исследовал поверхности третьего порядка, на которых все линии кривизны являются окружностями. Эти поверхности называются теперь циклидами Дюпена. Простейшей из них является тор — поверхность спасательного круга (кстати, мы просим читателя не путать тор с торсом, а циклиды с циклоидами). Легко сообразить, что тор может быть получен вращением окружности вокруг оси, лежащей в ее плоскости и не пересекающей ее, т. е. яв-

ляется поверхностью вращения (рис. 76). Мы займемся этими поверхностями в следующей главе, но уже сейчас скажем кое-что о нормалях тора.

Почти очевидно, что нормали тора, проходящие через его «меридиан» — вращающуюся окружность, — в каждом положении меридиана образуют пучок прямых с центром в центре окружности, т. е. торс (см. пример 3 гл. VII),

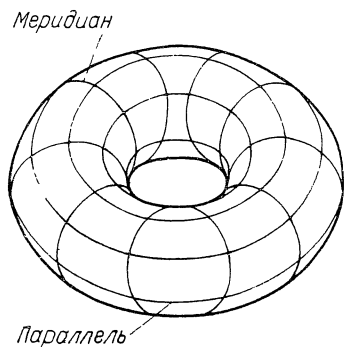


Рис. 76

выродившийся в плоскость (в ней лежит окружность). Менее очевидно, но это можно доказать, что вдоль «параллели» (т. е. траектории точки вращающейся окружности) нормали образуют конус.

Но вернемся к конгруэнциям более общего вида. И теоретическое и практическое значение изучения этого геометрического образа трудно переоценить. Не удивительно, что многие геометры, начиная с Монжа и его учеников, в течение долгого времени подробно изучали его. Итоги этого изучения за 150 лет подвел С. П. Фиников в монографии «Теория конгруэнций», изданной в 1950 г. и ставшей исходной точкой для развития этой теории в последующие годы.

Конгруэнцию, очевидно, можно представить себе как совокупность однопараметрических семейств прямых (это будут «линейчатые поверхности»), подобно тому как поверхность можно представлять как совокупность семейств линий. В случае нормальной конгруэнции каждому семейству линий поверхности будут соответствовать семейства линейчатых поверхностей, образованных нормальными. И вот тут-то и выясняется важное свойство линий кривизны, найденное Монжем в 1784 г., т. е. почти 200 лет назад, и известное теперь как теорема Монжа.

Совокупность нормалей к поверхности, проведенных в точках некоторых линий, принадлежащей этой поверхности, есть торс только тогда, когда эта линия является линией кривизны.

Прежде чем доказывать это утверждение, напомним еще раз, что торс есть линейчатая поверхность, состоящая из касательных к некоторой линии — «ребру возврата» (см. тот же пример 3 гл. VII). Чтобы доказать, что фигурирующая в теореме Монжа совокупность нормалей есть торс, надо найти это ребро. Обозначим точку ребра возврата буквой F . Радиус-векторы этих точек имеют вид (ср. (2. 29)):

$$\bar{R} = \bar{r} + \lambda \bar{e}_3,$$

где \bar{e}_3 — вектор нормали, а \bar{r} — радиус-вектор точки, пробегающей линию кривизны $v = \text{const}$. При этом должно быть

$$d\bar{R} \parallel \bar{e}_3,$$

так как линия, описываемая точкой F , должна касаться нормали (рис. 77). При помощи деривационных формул (8. 15) находим:

$$\frac{d\bar{R}}{ds} = \bar{e}_1 + \frac{d\lambda}{ds} \bar{e}_3 + \lambda (-v\bar{e}_1 + \kappa_g \bar{e}_2).$$

Наше условие влечет обращение в нуль коэффициентов при \bar{e}_1 и \bar{e}_2 , т. е.

$$\kappa_g = 0, \quad \lambda v = 1.$$

Следовательно, теорема Монжа доказана: только вдоль линий кривизны $\kappa_g = 0$ совокупность нормалей есть торс. Теперь вспомним торс: для него мы уже имели наглядную иллюстрацию теоремы Монжа: линии кривизны — окружности, торсы — конусы и пучки прямых. Скоро мы увидим, что почти так же обстоит дело и с любой поверхностью вращения.

Так как в общем случае имеется только два семейства линий кривизны, то в нормальной конгруэнции имеются только два семейства торсов. Оказывается, что и в любой конгруэнции имеется не более двух семейств торсов, и это является одним из основных результатов теории конгруэнций.

Из теоремы Монжа получается еще одна характеристика для инвариантов I_3 и I_4 . Именно в силу того, что $\lambda v = 1$, уравнение линии, описываемой точкой F (т. е. уравнение ребра возврата торса), принимает вид:

$$\bar{F} = \bar{r} + \frac{1}{v} \bar{e}_3 |_{v=\text{const}},$$

или, в силу (9. 22),

$$\bar{F} = \bar{r} + \frac{1}{I_3} \bar{e}_3 |_{v=\text{const}}, \quad (9.26)$$

Аналогично получим такую же линию вдоль линии кривизны $u = \text{const}$ (см. тот же рис. 77). Она имеет уравнение

$$\bar{F}_1 = \bar{r} + \frac{1}{I_4} \bar{e}_3 |_{u=\text{const}}, \quad (9.27)$$

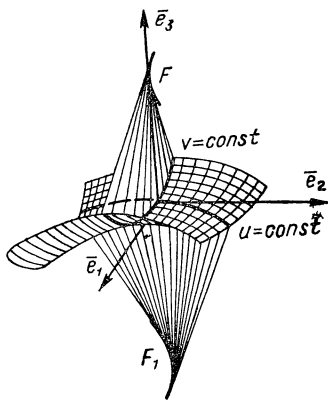


Рис. 77

Уравнения (9. 26) и (9. 27) дают новые геометрические характеристики инвариантам I_3 и I_4 : они обратны по величине абсциссам (т. е. взятым с соответствующим знаком расстояниям от точки поверхности) тех точек нормали, в которых соответствующие торсы касаются своих ребер возврата. Эти точки обычно называют фокусами нормали. Термин этот тоже заимствован из оптики.

Таким образом, соответствующие инварианты I_3 и I_4 (нормальные кривизны) (см. формулы (9. 22)) пригодились еще раз. Эти кривизны Эйлер назвал главными кривизнами, так как оказалось, что среди всех нормальных кривизн, которые можно подсчитать для всех линий поверхности, проходящих через данную точку, они имеют экстремальную величину (наибольшую или наименьшую).

ОТ ТОРСА ДО ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ

В начале пятой главы мы говорили о том, что, найдя канонический репер и зная полную систему инвариантов, можно решить главную задачу—провести классификацию геометрических образов и получить информацию об их строении. Мы начнем с отыскания простейших классов поверхностей. Конечно, при этом нам должны встретиться и наши старые знакомые — сфера, торс и т. д., но, вероятно, появятся и другие замечательные и важные для практики поверхности, о которых пока ничего не говорилось.

Всего мы имеем четыре инварианта. Естественно прежде всего попытаться последовательно рассмотреть ситуации, возникающие при обращении в нуль каждого из них. При этом следует воспользоваться некоторой родственностью инвариантов. Инварианты I_1, I_2, I_3, I_4 делятся на две пары: пара геодезических кривизн линий кривизны (I_1 и I_2) и пара нормальных кривизн тех же линий (I_3 и I_4) — см. формулы (9. 22). Так как линии кривизны равноправны, то и инварианты каждой пары равноправны между собой. Иными словами, поверхности, имеющие натуральные уравнения $I_1 = 0$ и $I_2 = 0$, не должны отличаться друг от друга. Точно так же и поверхности $I_3 = 0$ и $I_4 = 0$ одинаковы. Значит, исследовать надо не четыре, а всего две основных возможности. Этого, конечно, мало. Поэтому мы рассмотрим и более сложные натуральные уравнения, например $I_3 = I_4$ и др.

Кроме того, заметим, что обращение в нуль одновременно двух инвариантов и вообще одновременное выполнение двух независимых соотношений между инвариан-

тами должно приводить к противоречию или же порождать очень узкий класс поверхностей. Ведь произвольная поверхность задается всего лишь одной произвольной функцией двух аргументов. Это видно как из задания поверхности «по Монжу» (гл. VII)

$$z = z(x, y),$$

так и из того, что четыре инварианта полной системы (или соответствующие им четыре функции: A, B, a, b из деривационных формул (9. 20)) уже связаны тремя уравнениями (9. 25).

Сделав эти замечания, мы можем приступить к работе.

1. Рассмотрим сначала поверхность, для которой $I_3 = 0$, но $I_4 \neq 0$, т. е. $A = 0, B \neq 0$ (см. (9. 22)). Обращаясь к деривационным формулам (9. 20) и получаем:

$$\bar{e}_{3u} = 0,$$

т. е. вдоль линии $v = \text{const}$ нормаль не меняет направления. Такое необычное поведение нормали позволяет предполагать, что линии $v = \text{const}$ устроены очень просто. Подсчитаем кривизну такой линии по формуле (5. 18), дифференцируя, естественно, по u . Левый столбец формул (9. 20) дает:

$$\begin{aligned} \bar{r}_u &= a\bar{e}_1, \\ \bar{r}_{uu} &= a_u\bar{e}_1 + a\bar{e}_{1u} = a_u\bar{e}_1 + a\left(-\frac{a_v}{b}\right)\bar{e}_2. \end{aligned}$$

Однако в силу уравнений Петерсона — Кодацци (9. 25) в нашем случае

$$a_v = \frac{A_v b}{B} = 0.$$

Поэтому $\bar{r}_{uu} = a_u\bar{e}_1$, откуда $\bar{r}_u \parallel \bar{r}_{uu}$. Но так как в числитель формулы (5. 18) входит $\bar{r}_u \times \bar{r}_{uu}$, то кривизны линий $v = \text{const}$ равны нулю и все они прямые. Следовательно, рассматриваемая поверхность состоит из прямых, вдоль которых нормаль не меняется. Это свойство характерно для уже знакомого нам *торса* (см. пример 3 гл. VII). Итак, поверхность $I_3 = 0$ есть торс.

Разумеется, поверхность $I_4 = 0, I_3 \neq 0$ исследовать не надо. Сразу можно сказать, что и в этом случае мы будем иметь торс, но прямолинейными линиями кривизны будут линии $u = \text{const}$.

Таким образом, натуральное уравнение торсов можно записать в виде:

$$I_3 \cdot I_4 = 0. \quad (10.1)$$

Заметим сразу, что одновременное обращение в нуль обоих инвариантов I_3 и I_4 приводит в соответствии с формулами (9.20) к равенству $\bar{e}_{3u} = \bar{e}_{3v} = 0$. Это означает, что нормаль не изменяет направления уже не только вдоль некоторых линий, но и на всей поверхности. Ясно, что такая ситуация возможна только для плоскости, изучение которой как поверхности не нуждается в средствах и методах дифференциальной геометрии.

2. Продолжим изучение поверхностей, связанных с инвариантами I_3 и I_4 . Какая поверхность получится, если

$$I_3 = I_4 \neq 0? \quad (10.2)$$

Вспомним вторую характеристику этих инвариантов (см. конец предыдущей главы): они дают абсциссы фокусов нормали (9.26), (9.27). В нашем случае фокусы совпадают, т. е.

$$\bar{F} = \bar{F}_1 = \bar{F}_2 = \bar{r} + \frac{1}{I_3} \bar{e}_3 = \bar{r} + \frac{1}{I_4} \bar{e}_3. \quad (10.2)$$

Этот необычный двойной фокус стоит исследовать! Найдем производные его радиус-вектора \bar{F} . Имеем:

$$\bar{F}_u = a\bar{e}_1 + \left(\frac{1}{I_3}\right)_u \bar{e}_3 + \frac{1}{I_3} \bar{e}_{3u}.$$

Воспользуемся деривационной формулой

$$\bar{e}_{3u} = -\bar{A}e_1$$

и учтем, что $\frac{1}{I_3} = \frac{a}{A}$. Тогда первое и третье слагаемые взаимно уничтожатся и останется

$$\bar{F}_u = \left(\frac{1}{I_3}\right)_u \cdot \bar{e}_3.$$

Совершенно аналогично получим:

$$\bar{F}_v = \left(\frac{1}{I_4}\right)_v \cdot \bar{e}_3.$$

Теперь, чтобы иметь возможность применить уравнения Петерсона — Кодацци, перепишем уравнение (10.2)

в виде:

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b}, \quad A \neq 0, \quad B \neq 0$$

(мы опять воспользовались формулами (9.22)) и прологарифмируем его:

$$\ln A - \ln a = \ln B - \ln b.$$

А теперь продифференцируем правую часть по u :

$$(\ln B)_u - (\ln b)_u = \frac{B_u}{B} - \frac{b_u}{b}. \quad (10.4)$$

В силу (9.23) имеем:

$$B_u = \frac{A}{a} b_u.$$

Заменив здесь выражение $\frac{A}{a}$ равным ему выражением $\frac{B}{b}$, получим:

$$B_u = \frac{B}{b} b_u,$$

т. е.

$$\frac{B_u}{B} = \frac{b_u}{b}. \quad (10.5)$$

Теперь применим формулу (10.4), читая ее справа налево:

$$\frac{B_u}{B} - \frac{b_u}{b} = (\ln B)_u - (\ln b)_u = \left(\ln \frac{B}{b} \right)_u.$$

Так как в силу (10.5) левая часть этого равенства равна нулю, то получается:

$$\left(\ln \frac{B}{b} \right)_u = 0.$$

Совершенно так же доказывается, что

$$\left(\ln \frac{A}{a} \right)_v = 0.$$

Но у нас $\frac{B}{b} = \frac{A}{a}$, поэтому $\left(\ln \frac{B}{b} \right)_u = \left(\ln \frac{A}{a} \right)_u = 0$. Но тогда $\frac{A}{a} = \text{const}$ и, конечно, $\frac{B}{b} = \text{const}$. Значит, $I_3 = I_4 = \text{const}$.

Поэтому и

$$\bar{F} = \text{const.} \quad (10.6)$$

Итак, двойной фокус — неподвижная точка, т. е. все нормали поверхности пересекаются в одной и той же точке F с радиус-вектором (10.6). Это очень напоминает сферу: ее нормали-радиусы тоже пересекаются в общей точке — центре. Остается доказать, что и расстояние любой точки рассматриваемой поверхности до F постоянно, — это будет радиус сферы. А это доказывается очень просто: в силу (10.3)

$$|\bar{r} - \bar{F}| = \left| \frac{1}{I_3} \right| = \frac{a}{A} = \text{const.}$$

Итак, натуральное уравнение (10.2) определяет сферу с радиусом

$$\frac{1}{I_3} = \frac{1}{I_4}.$$

При выводе уравнений линий кривизны (гл. IX) мы обещали показать, что последние не определены только на сфере. В терминах канонического репера условие неопределенности линий кривизны (т. е. обращения их уравнения в тождество) принимает вид:

$$aB - bA = 0$$

(см. уравнение (9.18) при $\alpha_{23} = \beta_{13} = 0$, $\alpha_{13} = A$, $\beta_{23} = B$), а это равносильно натуральному уравнению сферы $I_3 = I_4$.

3. Рассмотрим теперь поверхность, задаваемую натуральным уравнением

$$I_3 = -I_4 \neq 0. \quad (10.7)$$

Прежде всего покажем, что поверхность может быть определена свойством: асимптотические линии (см. гл. IX) образуют ортогональную сеть. Попутно пересчитаем уравнение (9.10) этих линий в терминах канонического репера.

Последовательно применяя деривационные формулы (9.20), получаем:

$$L = \bar{r}_{uu} \cdot \bar{e}_3 = (a\bar{e}_1)_u \bar{e}_3 = a_u \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_3 + a \left(-\frac{a_v}{b} \bar{e}_2 + A\bar{e}_3 \right) \cdot \bar{e}_3 = aA,$$

$$M = \bar{r}_{uv} \bar{e}_3 = (a\bar{e}_1)_v \bar{e}_3 = a_v \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_3 + a \frac{b_u}{a} \bar{e}_2 \cdot \bar{e}_3 = 0,$$

$$N = \bar{r}_{vv} \bar{e}_3 = (b\bar{e}_2)_v \bar{e}_3 = b_v \bar{e}_2 \cdot \bar{e}_3 + b \left(-\frac{b_u}{a} \bar{e}_1 + B\bar{e}_3 \right) \bar{e}_3 = bB.$$

Итак, уравнение асимптотических линий в каноническом репере имеет вид:

$$aAdu^2 + bBdv^2 = 0,$$

или

$$\frac{dv}{du} = \pm \sqrt{-\frac{aA}{bB}} = \pm \sqrt{-\frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{A}{a} \cdot \frac{b}{B}} = \pm \frac{a}{b} \sqrt{-\frac{I_3}{I_4}}.$$

Отсюда прежде всего следует, что на поверхности (10.7) асимптотические линии всегда действительны, так как $-\frac{I_3}{I_4} = 1 > 0$.

Для одной асимптотической линии имеем:

$$\frac{dv}{du} = \frac{a}{b} q, \quad q = \sqrt{-\frac{I_3}{I_4}},$$

для другой —

$$\frac{dv}{du} = -\frac{a}{b} q.$$

Поэтому касательная к первой из них параллельна вектору

$$\begin{aligned} d\bar{r} &= \bar{r}_u du + \bar{r}_v dv = a\bar{e}_1 du + b\bar{e}_2 dv = \\ &= adu \left(\bar{e}_1 + \frac{b}{a} \frac{dv}{du} \bar{e}_2 \right) = adu (\bar{e}_1 + q\bar{e}_2) \parallel \bar{e}_1 + q\bar{e}_2. \end{aligned}$$

Аналогично находим, что касательная ко второй асимптотической линии параллельна вектору

$$\bar{e}_1 - q\bar{e}_2.$$

Скалярное произведение этих векторов (вспомните таблицу (2.13)) равно $1 - q^2$ и обращается в нуль только при $q^2 = 1$, т. е. при $I_3 + I_4 = 0$. Следовательно, касательные к асимптотическим линиям (во всех точках поверхности) перпендикулярны только для поверхностей (10.7), что мы и хотели показать.

Поверхности, задаваемые натуральным уравнением (10.7), называются *минимальными*. Такое неожиданное

название связано с решением хорошо известной из курса физики задачи, возникающей в опыте по изучению действия сил поверхностного натяжения. Опыт этот был впервые поставлен бельгийским физиком Жозефом Плато (1801—1883) в 1843 г. и состоит в следующем. На замкнутый проволочный контур натягивается упругая (например, мыльная) пленка. В соответствии с законами физики пленка должна расположиться так, чтобы получилась минимальная площадь. Можно доказать, что поверхность, обладающая этим свойством, как раз и характеризуется уравнением (10.7). Для этого придется решить задачу на экстремумы, но не такую, как те, которые решаются в школьном курсе математики, а посложнее.

Площадь поверхности вычисляется как определенный интеграл. Граница этого интеграла (контур) фиксирована, а подынтегральная функция (от двух переменных) меняется. И надо найти такую функцию, которая давала бы наибольшее или наименьшее значение интеграла. Первым такие задачи начал решать Эйлер, создавший в 1744 г. основы того раздела математики, который позднее получил название вариационного исчисления. Одним из достижений вариационного исчисления в то время и было решение задачи Плато. Любопытно, что задолго до ее экспериментального решения, полученного Плато, французский математик Жозеф Луи Лагранж (1736—1813) еще в 1760 г. нашел ее математическое решение. Однако первые конкретные нетривиальные примеры минимальных поверхностей указал в 1776 г. ученик Монжа Жан Менье¹ (1754—1793). Такими поверхностями были катеноид (о нем будет сказано несколько позднее) и уже известный нам прямой геликоид (см. пример 5 гл. II):

$$\bar{r}(u, v) = v\bar{e}(u) + bu\bar{k}. \quad (10.8)$$

Сейчас мы убедимся в том, что прямой геликоид действительно является минимальной поверхностью. Для этого найдем производные, пользуясь формулами (6.1):

$$\begin{aligned} \bar{r}_u &= v\bar{e}'(u) + b\bar{k}, \quad \bar{r}_v = \bar{e}(u), \quad \bar{r}_{uu} = -v\bar{e}(u), \\ \bar{r}_{uv} &= \bar{e}'(u), \quad \bar{r}_{vv} = 0. \end{aligned} \quad (10.9)$$

¹ Жан Менье — генерал, один из героев революционной Франции, погиб при обороне Майнца.

Вектор

$$\bar{N} = \bar{r}_u \times \bar{r}_v = v(\bar{e}' \times \bar{e}) + b(\bar{k} \times \bar{e}) = -v\bar{k} + b\bar{e}'$$

и единичный вектор нормали

$$\bar{e}_3 = \frac{\bar{N}}{|\bar{N}|} = \frac{b\bar{e}' - v\bar{k}}{\sqrt{b^2 + v^2}}.$$

Коэффициенты уравнения асимптотических линий (9.5) вычисляются так:

$$L = \bar{r}_{uu} \cdot \bar{e}_3 = 0, \quad M = \bar{r}_{uv} \cdot \bar{e}_3 = \frac{b}{\sqrt{b^2 + v^2}}, \quad N = \bar{r}_{vv} \cdot \bar{e}_3 = 0.$$

Поэтому асимптотическими будут линии

$$b \, du \, dv = 0,$$

т. е., так как $b \neq 0$, координатные линии, а они на геликоиде (10.8) ортогональны, ибо в силу (10.9)

$$\bar{r}_u \cdot \bar{r}_v = 0.$$

Это значит, что прямой геликоид является одной из минимальных поверхностей.

4. Теперь пора перейти к инвариантам I_1 и I_2 и рассмотреть поверхности $I_1 = 0$, $I_2 \neq 0$. Они также были известны еще Монжу, и их (как, впрочем, и некоторые другие) иногда так и называют поверхностями Монжа. Сам Монж дал им другое название, связанное со способом их получения и практическим применением.

Из (9.22) следует, что для рассматриваемых поверхностей

$$a_v = 0. \quad (10.10)$$

Тогда из уравнений Петерсона — Кодацци (9.25) получаем:

$$A_v = 0. \quad (10.11)$$

Левый столбец дериационных формул (9.20) принимает вид:

$$\bar{r}_u = a\bar{e}_1, \quad \bar{e}_{1u} = A\bar{e}_3, \quad \bar{e}_{2u} = 0, \quad \bar{e}_{3u} = -A\bar{e}_1.$$

Прежде всего покажем, что линия $v = \text{const}$ плоская, для чего подсчитаем кручение по формуле (5.20). Имеем:

$$\begin{aligned} \bar{r}_u = a\bar{e}_1, \quad \bar{r}_{uu} = a_u\bar{e}_1 + aA\bar{e}_3, \quad \bar{r}_{uuu} = a_{uu}\bar{e}_1 + a_uA\bar{e}_3 + \\ + (aA)_u \bar{e}_3 - aA^2\bar{e}_1. \end{aligned}$$

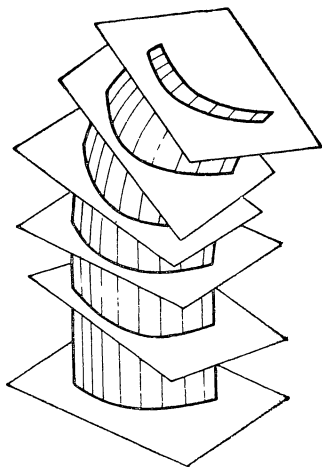


Рис. 78

Все эти векторы компланарны, поэтому смешанное произведение в числителе формулы (5.20) равно нулю, а следовательно, и кручение равно нулю. Значит, все линии кривизны одного семейства ($v = \text{const}$) лежат в плоскостях, хотя, конечно, в различных, — это плоскости канонических реперов, они параллельны векторам \bar{e}_1 и \bar{e}_3 и имеют уравнения

$$(\bar{R} - \bar{r}) \cdot \bar{e}_2 = 0. \quad (10.12)$$

Далее легко проверить, что все эти линии одинаковы, т. е. не меняются при переходе от плоскости к плоскости,

так как их натуральные уравнения не зависят от переменной v . В самом деле, для длины дуги имеем:

$$s = \int_0^u |\bar{r}_u| du = \int_0^u a(u) du = s(u),$$

а для кривизны (см. формулу 5.13) получается:

$$k = \frac{|\bar{r}_u \times \bar{r}_{uu}|}{|\bar{r}_u|^3} = \frac{|a\bar{e}_1 \times (a_u\bar{e}_1 + aA\bar{e}_3)|}{a^3} = \frac{A}{a}.$$

В силу формул (10.10) и (10.11) кривизна тоже не зависит от v . Следовательно, и связь между s и k не зависит от v . Более того, значения s и k сохраняются вдоль каждой линии $v = \text{const}$. Эти линии, имеющие касательными векторы \bar{e}_2 , всюду перпендикулярны плоскостям (10.12). Поэтому нашу поверхность можно представить так, как показано на рисунке 78. Возьмем произвольное однопараметрическое семейство плоскостей. На одной из них зададим произвольную кривую — «профиль». Через точки этой кривой проведем траектории, ортогональные к нашим плоскостям. По существу, именно так уже давно поступают строители, отделяя карнизы зданий и помещений в них простейшими лепными украшениями.

В соответствии с замыслом архитектора изготавливается трафарет (профиль), с помощью которого из еще не затвердевшего гипса или другого строительного материала вырезывается карниз. Вот почему Монж и назвал эти поверхности *резными*.

Простейшим примером резных поверхностей являются поверхности вращения. В этом случае семейство плоскостей есть пучок, полученный вращением плоскости вокруг принадлежащей ей прямой (оси), а профиль называется меридианом.

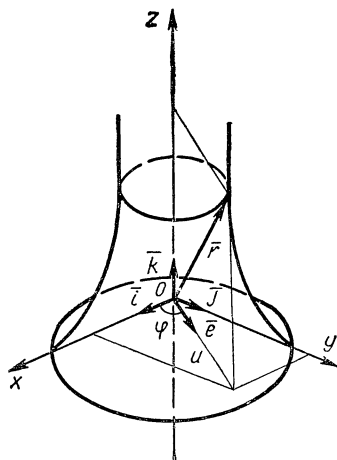


Рис. 79

Нетрудно написать координатные уравнения такой поверхности. Пусть (рис. 79) $\bar{e}(\varphi)$ — единичный вектор во вращающейся плоскости, перпендикулярный оси вращения (она совмещена с осью Oz). Радиус-вектор точки меридиана в плоскости векторов \bar{e} , \bar{k} имеет вид:

$$\bar{r} = u\bar{e} + z\bar{k},$$

где $\bar{e}(\varphi)$ — знакомый нам вектор:

$$\bar{e}(\varphi) = \cos \varphi \bar{i} + \sin \varphi \bar{j}.$$

Уравнение меридиана можно записать в виде: $u = u(t)$, $z = z(t)$ или, проще, в виде: $u = \psi(z)$, где u , z — декартовы координаты в плоскости меридиана.

Уравнение поверхности вращения принимает вид:

$$\bar{r} = \psi(z)\bar{e}(\varphi) + z\bar{k}. \quad (10.13)$$

Очевидно, линии $\varphi = \text{const}$ будут меридианами, а линии $z = \text{const}$ — параллелями (окружностями, описываемыми точками меридиана).

Читателю известны многочисленные примеры поверхностей вращения: круговой конус, круговой цилиндр, сфера, псевдосфера, тор и др. Найдем еще одну интересную поверхность вращения — минимальную. Для этого нам понадобятся асимптотические линии. Подсчитаем производные

$$\begin{aligned}\bar{r}_z &= \psi'(z)\bar{e}(\varphi) + \bar{k}, \quad \bar{r}_\varphi = \psi(z)\bar{e}'(\varphi), \\ \bar{r}_{zz} &= \psi''(z)\bar{e}(\varphi), \quad \bar{r}_{z\varphi} = \psi'(z)\bar{e}'(\varphi), \quad \bar{r}_{\varphi\varphi} = -\psi(z)\bar{e}(\varphi)\end{aligned}\quad (10.14)$$

и попробуем найти уравнение асимптотических линий. Как и для геликоида,

$$\bar{N} = \bar{r}_z \times \bar{r}_\varphi = \psi(z) \cdot \psi'(z)\bar{k} - \psi(z)\bar{e}(\varphi)$$

и

$$\bar{e}_3 = \frac{-\psi\bar{e} + \psi\psi'\bar{k}}{|\bar{N}|}.$$

Далее,

$$L = \bar{r}_{zz} \cdot \bar{e}_3 = -\frac{\psi\psi''}{|\bar{N}|}, \quad M = \bar{r}_{z\varphi} \cdot \bar{e}_3 = 0,$$

$$N = \bar{r}_{\varphi\varphi} \cdot \bar{e}_3 = \frac{\psi^2}{|\bar{N}|}.$$

Поэтому для асимптотических линий получается уравнение

$$-\psi\psi''dz^2 + \psi^2d\varphi^2 = 0,$$

или

$$\frac{d\varphi}{dz} = \pm \sqrt{\frac{\psi''}{\psi}}.$$

Касательные к этим линиям параллельны векторам

$$d\bar{r} = \bar{r}_z dz + \bar{r}_\varphi d\varphi = \bar{r}_z + \frac{d\varphi}{dz} \bar{r}_\varphi = \bar{r}_z + \sqrt{\frac{\psi''}{\psi}} \bar{r}_\varphi$$

и

$$d\bar{r} = \bar{r}_z dz + \bar{r}_\varphi d\varphi = \bar{r}_z + \frac{d\varphi}{dz} \bar{r}_\varphi = \bar{r}_z - \sqrt{\frac{\psi''}{\psi}} \bar{r}_\varphi.$$

Их скалярное произведение должно быть равно нулю, т. е.

$$\left(\bar{r}_z + \sqrt{\frac{\psi''}{\psi}} \bar{r}_\varphi\right) \left(\bar{r}_z - \sqrt{\frac{\psi''}{\psi}} \bar{r}_\varphi\right) = 0.$$

Вычислив это произведение с учетом формул (10.14), получим:

$$\psi'^2 + 1 - \frac{\psi''}{\psi} \cdot \psi^2 = 0,$$

т. е.

$$1 + \psi'^2 - \psi''\psi = 0. \quad (10.15)$$

Мы вновь, как и в девятой главе, получили дифференциальное уравнение второго порядка. Для отыскания удовлетворяющей ему функции $\psi(z)$ поступим следующим образом. Сначала продифференцируем (10.15). Получим:

$$2\psi''\psi' - \psi'''\psi - \psi''\psi' = 0,$$

или

$$\psi'''\psi - \psi''\psi' = 0.$$

Нетрудно заметить, что левая часть последнего равенства есть числитель производной частного $\frac{\psi''}{\psi}$. Но если $\left(\frac{\psi''}{\psi}\right)' = 0$, то $\frac{\psi''}{\psi} = \text{const} = c$. Отсюда следует, что решением уравнения (10.15) будет функция, удовлетворяющая уравнению

$$\psi''(z) = c\psi(z). \quad (10.16)$$

Известно, что дифференциальное уравнение гармонических колебаний

$$f''(t) = -cf(t)$$

имеет решениями функции вида:

$$f(t) = A \cos(\omega t + \varphi).$$

В простейшем случае ($A = 1$, $\omega = 1$, $\varphi = 0$) имеем: $f(t) = \cos t$.

Уравнение (10.16) очень напоминает уравнение гармонических колебаний и можно предполагать, что его решениями будут функции, в чем-то аналогичные косинусу. Действительно, уравнению (10.16) при $c = 1$ удовлетворяет (проверьте!) функция

$$\psi(z) = \text{ch } z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}. \quad (10.17)$$

Эта функция называется гиперболическим косинусом. Вместе с так называемым гиперболическим синусом $\text{sh } z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$ она дает возможность построения гиперболической тригонометрии, во многом аналогичной известной читателю обыкновенной тригонометрии. В частности, вместо основной формулы тригонометрии

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

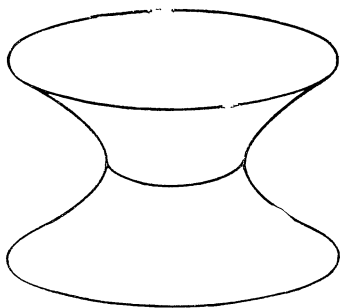


Рис. 80

здесь действует (проверьте!)
очень похожая формула

$$\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1.$$

Итак, поверхность

$$\bar{r} = \operatorname{ch} z \cdot \bar{e} + z \bar{k} \quad (10.18)$$

является минимальной поверхностью вращения. Линия $u = \operatorname{ch} z$ называется цепной, так как такую форму принимает тяжелая цепь, подвешенная свободно (без натяжения).

А поверхность, полученная ее вращением, и есть уже упоминавшийся катеноид (рис. 80), минимальность которого доказал Менье.

В заключение покажем, что меридианы и параллели на всех поверхностях вращения являются линиями кривизны. Действительно, они образуют ортогональную сеть, так как (см. (10. 14))

$$\bar{r}_\varphi \cdot \bar{r}_z = \psi(z) \bar{e}' \cdot (\psi(z) \bar{e} + \bar{k}) = 0,$$

ибо $\bar{e}' \perp \bar{e}$ и $\bar{e}' \perp \bar{k}$. С другой стороны, нормаль поверхности параллельна вектору

$$\bar{N} \parallel \bar{r}_\varphi \times \bar{r}_z \parallel \bar{e}' \times (\psi(z) \bar{e} + \bar{k}) = -\psi(z) \bar{k} + \bar{e}(\varphi)$$

(мы воспользовались таблицей (2. 22) для ортогональной тройки \bar{e} , \bar{e}' , \bar{k}). Следовательно, вдоль меридиана $\varphi = \text{const}$ все нормали будут лежать в фиксированной плоскости, определяемой векторами \bar{k} , \bar{e} , т. е. в плоскости самого меридиана. Но совокупность прямых, лежащих в одной плоскости, зависящая от одного параметра (z), есть линейчатая поверхность, выродившаяся в торс, т. е. совокупность касательных к одной плоской кривой. Итак, меридианы суть линии кривизны. Но тогда линиями кривизны будут и ортогональные им параллели (легко проверить, что вдоль них нормали описывают конусы).

ВНУТРЕННЯЯ ГЕОМЕТРИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ

В четырех предыдущих главах мы провели исследование поверхностей и линий на поверхности по плану, описанному в начале пятой главы. Именно, мы произвели репераж поверхности, а также линии на поверхности, нашли полные системы инвариантов и рассмотрели простейшие классы линий на поверхности и поверхностей. Все это удалось сделать относительно легко потому, что мы следовали не историческому, а логическому пути. Этот путь — метод подвижного репера — разработан только в XX в.

Исторически же путь развития дифференциальной геометрии определялся прежде всего требованиями практики. О какой практике идет речь? Минула эпоха великих географических открытий. Настала пора составления точных географических карт. Для этого надо было научиться измерять расстояния вдоль линий на поверхности, выбирать из них кратчайшее, вычислять углы между линиями.

Из этих требований выросли две науки, целиком опирающиеся на дифференциальную геометрию: геодезия — наука об измерениях на земной поверхности, а также о форме и размерах самой этой поверхности (сфера является слишком грубым приближением к ней) и картография — наука об изображении земной поверхности на плоскости с минимальным искажением всех размеров (длин, углов, площадей). Не удивительно, что именно Гаусс, сам много занимавшийся геодезией, решил задачу об измерениях на произвольной кривой поверхности.

Попробуем и мы рассказать об этом на основе имеющихся у нас сведений (недаром у нас уже появились геодезическая кривизна и даже геодезическое кручение).

Итак, пусть дана произвольная поверхность

$$\bar{r} = \bar{r}(u, v), \quad (11.1)$$

точнее, некоторый ее кусок, покрытый правильной ортогональной сетью линий $v = \text{const}$ и $u = \text{const}$ (пока не будем предполагать, что это линии кривизны). На ней даны две точки M_1 и M_2 и соединяющая их кривая

$$u = u(t), \quad v = v(t), \quad (11.2)$$

причем для первой точки $t = t_1$, а для второй — $t = t_2$. Как найти длину L этой линии? Ответ очевиден:

$$L = \int_{t_1}^{t_2} ds.$$

А что такое ds ? Мы уже не раз отмечали, что

$$ds = |d\bar{r}| = |\bar{r}_u du + \bar{r}_v dv| = \sqrt{(\bar{r}_u du + \bar{r}_v dv) \cdot (\bar{r}_u du + \bar{r}_v dv)}.$$

Вдоль линии (11.2)

$$du = u' dt, \quad dv = v' dt, \quad (11.3)$$

и окончательная формула для вычисления длины дуги принимает вид:

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{a^2 u'^2 + b^2 v'^2} dt, \quad (11.4)$$

где использованы знакомые читателю обозначения:

$$a^2 = \bar{r}_u \cdot \bar{r}_u, \quad b^2 = \bar{r}_v \cdot \bar{r}_v. \quad (11.5)$$

Но мореходу надо не только измерять путь, но и выбирать кратчайший. Ведь путь по глади океана — не пешеходная дорога или шоссе, рельеф местности отсутствует. Это задача потруднее. Но попробуем решить и ее.

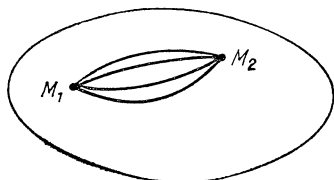


Рис. 81

Пусть опять даны две точки M_1 и M_2 на поверхности, причем кусок поверхности, их содержащий, удовлетворяет обычным требованиям. Среди всех возможных кусков кривых, соединяющих M_1 и M_2 , надо выбрать кратчайший (рис. 81). Иначе го-

воря, надо искать функцию $u = u(v)$ или $v = v(u)$, дающую экстремум интеграла (11. 4). За t всегда можно принять u или v , мы это не раз делали.

Попробуем решить эту задачу имеющимися в нашем распоряжении средствами. Рассмотрим все геодезические линии, проходящие через M_1 , — в девятой главе мы показали, что таковые проходят по всем направлениям, — и примем их за линии $v = \text{const}$. Правда, в точке M_1 нарушится условие правильности сети, но это не отразится на решении задачи. Построим ортогональные траектории семейства $u = \text{const}$ (они существуют, как мы показали в гл. VIII). Получится ортогональная сеть, и будет действовать формула (11. 4). Что дает нам то обстоятельство, что линии $v = \text{const}$ геодезические? Это значит, что при $v = \text{const}$, т. е. при $dv = 0$, должно удовлетворяться уравнение (9. 14). Это дает: $-\frac{aa_v}{b} = 0$. Тогда $a_v = 0$, т. е. функция a зависит лишь от одного переменного $a = a(u)$. Теперь сделаем такую замену переменных:

$$u^* = \int a(u)du, \quad v^* = v. \quad (11. 6)$$

При этой замене координатная сеть сохраняется, так как

$$\begin{aligned} u = \text{const} &\Leftrightarrow u^* = \text{const}, \\ v = \text{const} &\Leftrightarrow v^* = \text{const}, \end{aligned}$$

но зато

$$du^* = a(u)du, \quad dv^* = dv$$

и формула (11. 4) принимает вид:

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{u^{*2} + b^{*2}v^{*2}} dt, \quad (11.7)$$

где b^* получается из b после замены переменных.

Теперь положим $u^* = t$, $v^* = v^*(t) = v^*(u^*)$. Тогда

$$L = \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{1 + b^{*2} \left(\frac{dv^*}{du^*} \right)^2} du^*.$$

Ясно, что наименьшее значение этот интеграл примет

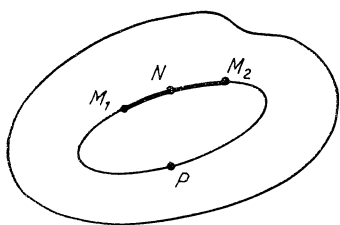


Рис. 82

координатной сети всюду, кроме M_1 , — замкнутая геодезическая (рис. 82). Тогда надо из двух дуг: M_1NM_2 и M_1PM_2 — выбрать меньшую. Именно такая ситуация имеет место на сфере, ибо на ней геодезическими являются большие круги (их плоскости проходят через радиусы — нормали сферы, это свойство и определяет геодезическую; см. гл. IX). Кратчайшее расстояние, конечно, дает меньшая из двух дуг большого круга (рис. 83).

Итак, мы решили одну очень важную для практики задачу. Не менее важна и задача о вычислении угла Θ между двумя данными линиями, проходящими через точку M поверхности.

Мы знаем, что за угол Θ принимается угол между касательными к этим линиям в точке M . Пусть эти линии имеют уравнения

$$u = u_1(t), \quad v = v_1(t)$$

и

$$u = u_2(t), \quad v = v_2(t).$$

Касательные к ним будут иметь направления

$$\begin{aligned} \bar{t}_1 &= \bar{r}_u u'_1(t) + \bar{r}_v v'_1(t), \\ \bar{t}_2 &= \bar{r}_u u'_2(t) + \bar{r}_v v'_2(t), \end{aligned} \quad (11.8)$$

а угол Θ между ними вычисляется по хорошо известной формуле угла между двумя векторами (с учетом (11.5)).

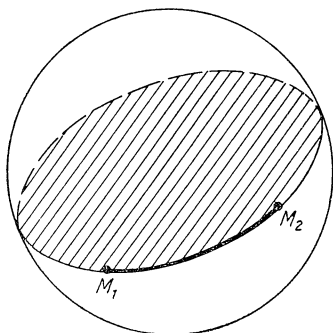


Рис. 83

В терминах канонического репера получится:

$$\cos \Theta = \frac{a^2 u_1' u_2' + b^2 v_1' v_2'}{\sqrt{a^2 u_1'^2 + b^2 v_1'^2} \sqrt{a^2 u_2'^2 + b^2 v_2'^2}}. \quad (11.9)$$

Обратим внимание на одно очень существенное обстоятельство. Предположим, что мы отнесли поверхность к каноническому реперу. Формулы (11. 4) и (11. 9) и уравнение геодезических (9. 14) сохраняются. Но в них фигурируют только коэффициенты a и b из деривационных формул, а коэффициенты A и B не участвуют.

Оказывается, для вычисления площади куска поверхности тоже достаточно знать только коэффициенты a и b . Мы не будем выводить соответствующую формулу. Получается, что все измерения на поверхности можно производить, если из четырех функций a , b , A , B , фигурирующих в деривационных формулах (9. 20), известны лишь две: a и b .

Гаусс формулировал эту мысль чуть иначе. Он обратил внимание на то, что функции a и b не инвариантны. Но подынтегральное выражение формулы (11. 4) для вычисления длины дуги, несомненно, инвариантно, представляя собой дифференциал этой длины. Его можно записать так:

$$ds = \sqrt{a^2 u'^2 + b^2 v'^2} dt.$$

Введя dt под знак радикала и возведя в квадрат правую и левую части этого равенства, получим:

$$ds^2 = a^2 du^2 + b^2 dv^2. \quad (11. 10)$$

В произвольной координатизации ds^2 выражается через du и dv несколько сложнее:

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2. \quad (11.11)$$

Гаусс назвал это выражение *первой основной дифференциальной квадратичной формой*¹ *поверхности* (короче говорят: *первая квадратичная форма*) и сформулировал такой вывод: для проведения всех измерений на поверхности достаточно знать ее первую квадратичную форму.

¹ Формой называют однородный многочлен, т. е. многочлен, все члены которого имеют одну и ту же степень.

Все, что можно сказать про поверхность, опираясь только на дифференциальный инвариант (11. 10) или, что то же, (11. 11), составляет содержание теории, которую называют *внутренней геометрией поверхности*.

Выясним, какие их четырех инвариантов поверхности выражаются через a и b , т. е. принадлежат внутренней геометрии. Из формул (9. 22) сразу следует, что таковыми являются $I_1 = -\frac{a_v}{ab}$ и $I_2 = \frac{b_u}{ab}$. Кроме того, из уравнения Гаусса (9. 24) получаем, что

$$\frac{AB}{ab} = \left(-\left(\frac{a_v}{b} \right)_v - \left(\frac{b_u}{a} \right)_u \right) : ab.$$

Отсюда справедлива теорема: инвариант

$$I_3 I_4 = \frac{A}{a} \cdot \frac{B}{b} \quad (11.12)$$

принадлежит внутренней геометрии поверхности. Гаусс назвал ее (см. гл. VII) «*theorema egregium*». Тому, что Гаусс восхитился этим результатом и удивился ему, есть ясная причина: ведь по отдельности I_3 и I_4 не могут быть выражены только через a и b и их производные, т. е. не принадлежат внутренней геометрии поверхности, а их произведение принадлежит.

Инварианты I_3 и I_4 , а также $I_3 I_4$ и $I_3 + I_4$ были найдены еще Эйлером, но казалось, что все они порождаются нормалью: ведь в силу формул (9. 22) I_3 и I_4 суть *нормальные кривизны* и к измерениям на поверхности не имеют прямого отношения. Гаусс, следуя Эйлеру, назвал инвариант $I_3 I_4$ *полной кривизной* поверхности. Инвариант же $\frac{1}{2} (I_3 + I_4)$ получил название *средней кривизны*.

Подчеркивая, что инвариант $I_3 I_4$ принадлежит именно внутренней геометрии поверхности, геометры стали называть его *гауссовой кривизной*. Ее обозначают:

$$K = I_3 I_4. \quad (11. 13)$$

Для средней кривизны употребляют обозначение:

$$H = \frac{1}{2} (I_3 + I_4). \quad (11.14)$$

В этих обозначениях натуральные уравнения торсов и минимальных поверхностей (см. гл. IX) принимают вид: $K = 0$, $H = 0$.

Гауссова кривизна играет очень большую роль в теории поверхностей. Полезно иметь для нее вычислительную формулу в терминах полуканонического репера (дериационные формулы (8. 11)). Получить ее можно, находя фокусы на нормали (см. гл. IX). Мы опустим выкладки и приведем результат:

$$K = I_3 I_4 = \frac{\alpha_{13}\beta_{23} - \alpha_{23}\beta_{13}}{ab}. \quad (11.15)$$

Продолжая изучение внутренней геометрии поверхностей, поставим естественный вопрос: могут ли существовать две различные поверхности с одинаковой внутренней геометрией? Иначе говоря, можно ли на двух различных поверхностях S и S^* так построить координатные сети, что для точек, имеющих одинаковые координаты и принадлежащих линиям, имеющим одинаковые уравнения, окажутся равными и расстояния между точками, измеренные по этим линиям?

Итак, пусть точка M_1 на поверхности S имеет такие же координаты u_1 и v_1 , что и точка M_1^* на поверхности S^* , а точка M_2 на поверхности S — такие же координаты u_2 и v_2 , что и точка M_2^* (рис. 84). Пусть далее линии l на поверхности S и l^* на поверхности S^* задаются одними и теми же уравнениями:

$$u = u(t), \quad v = v(t).$$

Тогда должны быть равны длины L и L^* этих линий, вычисляемые по формуле (11. 4). Это условие должно выполняться для всех соответствующих точек и линий. Значит, на обеих поверхностях должны быть одинаковы подынтегральные выражения формулы (11. 4). Тогда должны быть одинаковы первые квадратичные формы (11. 10) и (11. 14).

Иными словами, при указанном выборе координатных сетей коэффициенты форм $(ds)^2$ и $(ds^*)^2$ должны быть равны при любых значениях u и v , хотя поверхности и различны, т. е. задаются разными уравнениями:

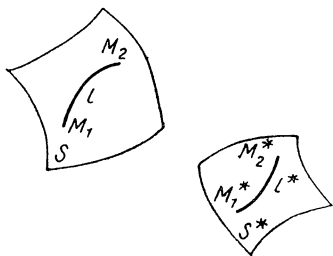


Рис. 84

$$\bar{r} = \bar{r}(u, v) \quad (11.16)$$

и

$$\bar{r} = \bar{r}^*(u, v). \quad (11.17)$$

Тождественное равенство $(ds)^2 = (ds^*)^2$ обеспечивает тремя равенствами:

$$E(u, v) = E^*(u, v), \quad F(u, v) = F^*(u, v), \quad (11.18) \\ G(u, v) = G^*(u, v).$$

Мы воспользовались общим выражением (11.11) для $(ds)^2$, так как выбор координатных сетей сейчас от нас не зависит: он диктуется необходимостью соблюдения равенства длин.

Но как обеспечить выполнение трех равенств (11.18)? Поверхности изменять нельзя. Соответствие между ними определено равенством координат соответствующих точек (см. формулы (11.16) и (11.17)). Но можно произвести замену этих общих координат

$$u = f(\tilde{u}, \tilde{v}), \\ v = \varphi(\tilde{u}, \tilde{v})$$

на обеих поверхностях одновременно.

Итак, в нашем распоряжении *две* функции для обеспечения *трех* равенств (11.8). В общем случае этого недостаточно. Значит, в общем случае обеспечение одинаковости внутренних геометрий на двух различных поверхностях невозможно.

Но общая невозможность довольно часто становится возможностью в частных случаях. Если удастся на двух разных поверхностях выбрать координатные сети так, что выполняются равенства (11.18), то говорят, что одна поверхность *изгибается* в другую или одна поверхность является *изгибанием* другой.

Термин соответствует практическому значению этого слова. Изогнуть — это значит изменить форму поверхности (например, тонкого металлического листа), сохранив все размеры, т. е. изменить форму так, чтобы не получилось ни растяжения (как это бывает при деформации резиновой пленки: все или часть размеров при этом нарушаются), ни складок (что также изменило бы размеры). Простейшие примеры изгибания известны читателю — это развертки цилиндра и конуса (рис. 85) на кусок плоскости.

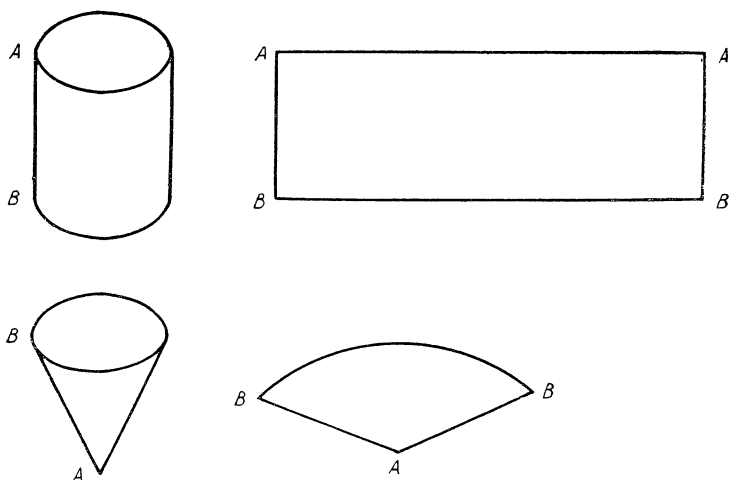


Рис. 85

Следующий пример изгибаемости поверхностей друг на друга на первый взгляд почти неправдоподобен. Оказывается, друг на друга изгибаются совершенно непохожие поверхности: прямой геликоид (см. пример 6 гл. II) и катеноид (см. гл. X). Тем не менее это так, и мы сейчас это докажем.

Для доказательства надо найти квадратичные дифференциальные формы обеих поверхностей $(ds)^2$ и $(ds^*)^2$ и затем сделать подходящую замену переменных на одной из них.

Уравнение катеноида имеет вид:

$$\bar{r} = \psi(z) \bar{e}(\varphi) + z \bar{k},$$

где $\psi(z) = \text{ch } z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$ (см. (10.17)). Для него

$$E = \bar{r}_z \cdot \bar{r}_z = (\psi'(z) \bar{e}(\varphi) + \bar{k})^2 = (\psi'(z))^2 + 1,$$

$$F = \bar{r}_z \cdot \bar{r}_\varphi = (\psi'(z) \bar{e}(\varphi) + \bar{k}) \cdot \psi(z) \bar{e}'(\varphi) = 0,$$

$$G = \bar{r}_\varphi \cdot \bar{r}_\varphi = (\psi(z) \bar{e}'(\varphi))^2 = (\psi(z))^2.$$

Здесь $\psi'(z) = \text{sh } z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$. Первая квадратичная форма катеноида имеет вид:

$$(ds)^2 = (\psi'^2 + 1) (dz)^2 + \psi^2 (d\varphi)^2. \quad (11.19)$$

Уравнение геликоида имеет вид:

$$\bar{r} = v\bar{e}(u) + bu\bar{k}. \quad (11.20)$$

Пусть его шаг равен 2π , т. е. $b = 1$. Тогда

$$E = \bar{r}_u \cdot \bar{r}_u = (v\bar{e}' + \bar{k})^2 = v^2 + 1,$$

$$F = \bar{r}_u \cdot \bar{r}_v = (v\bar{e}' + \bar{k}) \cdot \bar{e} = 0,$$

$$G = \bar{r}_v \cdot \bar{r}_v = \bar{e} \cdot \bar{e} = 1.$$

Первая квадратичная форма геликоида имеет вид:

$$(ds^*)^2 = (v^2 + 1) (du)^2 + (dv)^2. \quad (11.21)$$

Формы (11.20) и (11.21) очень похожи. Напрашивается замена для катеноида:

$$\varphi = u, \quad (11.22)$$

$$\psi^2(z) \equiv \text{ch}^2 z = v^2 + 1.$$

Тогда $d\varphi = du$, $\psi'^2 + 1 = \text{sh}^2 z + 1 = \text{ch}^2 z = v^2 + 1$, и форма (11.19) принимает вид:

$$(ds)^2 = (\text{ch} z dz)^2 + (v^2 + 1) (du)^2.$$

Но в силу (11.22)

$$\text{ch} z dz = dv. \quad (11.23)$$

Итак, форма (11.19) в новых переменных имеет вид (11.21). Следовательно, изгибание геликоида на катеноид возможно. При этом

$$v = \text{const} \Leftrightarrow \psi = \text{const} \Leftrightarrow z = \text{const},$$

$$u = \text{const} \Leftrightarrow \varphi = \text{const},$$

т. е. винтовые линии геликоида ($v = \text{const}$) превращаются в параллели (окружности) $z = \text{const}$ катеноида, а прямолинейные образующие $u = \text{const}$ — в меридианы, т. е. в цепные линии $\varphi = \text{const}$. Так как параллели имеют конечную длину, а винтовые линии — бесконечную, то каждая винтовая линия будет бесконечно много раз «навертываться» на соответствующую параллель, т. е. взаимно однозначное соответствие будет иметь место только для значений u , принадлежащих промежутку $[0, 2\pi[$. Картина прямо-таки фантастическая, если посмотреть на изображения катеноида и геликоида (см. рис. 21 и 80) и вспомнить способы их построения.

Однако пора перейти от красивого примера к систематическому изучению проблемы. «Theorema egregium»

Гаусса подсказала ему следующее важное умозаключение: если две поверхности изгибаются друг на друга, то в соответствующих точках их гауссовы кривизны должны быть равны, так как они принадлежат внутренней геометрии поверхности.

Отсюда следует, что если на какой-нибудь поверхности гауссова кривизна постоянна, то она может изгибаться только на поверхность той же самой постоянной кривизны. Покажем, что такое изгибание всегда возможно (разумеется, локально). Возьмем поверхность постоянной кривизны и отнесем ее к ортогональной сети, которую мы строили, доказывая экстремальные свойства геодезических линий. Тем самым мы отнесем поверхность к некоторому полуканоническому реперу. Формула для вычисления длины дуги в таком репере имеет вид (ср. (11. 7)):

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{u'^2 + b^2 v'^2} dt. \quad (11. 24)$$

Следовательно, первая квадратичная форма запишется так:

$$(ds)^2 = (du)^2 + b^2 (dv)^2. \quad (11. 25)$$

Гауссову кривизну можно вычислить по формуле (11. 15). Получится (выкладку мы опускаем):

$$K = \frac{b_{uu}}{b}.$$

Таким образом, для функции $b(u, v)$ получается очень простое дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 b}{\partial u^2} - Kb = 0, \quad (11.26)$$

где K — постоянное число. Попробуем его решить.

Начнем с простейшего случая: $K = 0$, т. е. с торса. Тогда

$$\frac{\partial^2 b}{\partial u^2} = 0,$$

откуда

$$\frac{\partial b}{\partial u} = f_1(v). \quad (11.27)$$

Обратите внимание: вместо произвольной постоянной мы пишем произвольную функцию от v , ибо неизвестная функ-

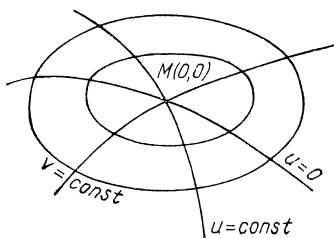


Рис. 86

ной сети (она состоит из пучка геодезических линий $u = \text{const}$, проходящих через фиксированную точку M , и ортогональных им замкнутых кривых $v = \text{const}$; см. рис. 86), можно доказать, что

$$f_1(v) = 1, \quad f_2(v) = 0.$$

Следовательно, первая квадратичная форма принимает вид:

$$(ds)^2 = (du)^2 + u^2 dv^2. \quad (11.29)$$

Покажем, что к такому же виду можно привести первую квадратичную форму плоскости. Для любой линии $x = x(t)$, $y = y(t)$ на плоскости, отнесенной к декартовой системе координат, действует формула $ds = |\vec{r}'| dt$. Так как

$$\vec{r}' = x'(t) \vec{i} + y'(t) \vec{j},$$

то

$$(ds)^2 = ((x'(t))^2 + (y'(t))^2) (dt)^2 = (dx)^2 + (dy)^2. \quad (11.30)$$

Однако декартова система мало похожа на то, что изображено на рисунке 86. Гораздо ближе к нему так называемая полярная система координат, получающаяся из декартовой заменой

$$x = \rho \cos \Theta, \quad y = \rho \sin \Theta \quad (11.31)$$

(рис. 87). Так как

$$x^2 + y^2 = \rho^2,$$

то линиями $\rho = \text{const}$ будут окружности с центром в начале координат, а линиями $\Theta = \text{const}$ — прямые, проходящие через начало декартовой системы. Это похоже на рисунок 87! Продифференцируем (11.31):

ция, являющаяся решением уравнения (11.26), есть функция двух переменных: $b = b(u, v)$. Уравнение (11.27) опять-таки интегрируется просто:

$$b = f_1(v)u + f_2(v). \quad (11.28)$$

При помощи простых рассуждений, опирающихся на специальные свойства фигурирующей у нас координат-

$$\begin{aligned} dx &= \cos \Theta d\rho - \rho \sin \Theta d\Theta, \\ dy &= \sin \Theta d\rho + \rho \cos \Theta d\Theta \end{aligned}$$

и подставим результат в (11. 30). Получим:

$$(ds)^2 = (d\rho)^2 + \rho^2 (d\Theta)^2. \quad (11.32)$$

Переход от (11. 29) к (11.32) очевиден:

$$u \Leftrightarrow \rho, \quad v^* \Leftrightarrow \Theta.$$

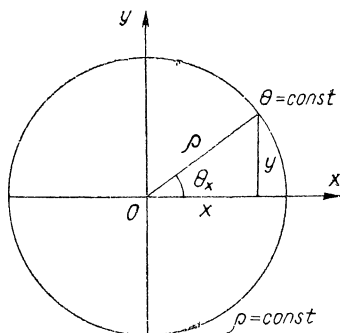


Рис. 87

Итак, всякий торс изгибается на плоскость. Следовательно, всякий торс изгибается на любой другой торс (через изгибание на плоскость — своеобразная транзитивность). Более того, любой кусок торса можно изгибать на другое место того же торса, т. е. двигать его по торсу так же, как кусочек плоскости двигается по плоскости.

При $K > 0$ решение уравнения (11. 26) приводится к виду

$$b = \sin (u \sqrt{K}) \quad (11. 33)$$

(в том, что это, действительно, решение, читатель может убедиться простой подстановкой (11. 33) в (11. 26)). Поэтому

$$(ds)^2 = (du)^2 + \sin^2 (u \sqrt{K}) (dv)^2. \quad (11. 34)$$

Рассмотрим сферу. Для нее (см. пример 2 гл. X)

$$K = I_3 I_4 = \frac{1}{R^2} = \text{const} > 0,$$

где R — радиус сферы.

Таким образом, сфера имеет всюду постоянную положительную кривизну. Подсчитаем первую квадратичную форму сферы, записав ее уравнение в виде:

$$\bar{r} = R \sin v \bar{e}(u) + R \cos v \bar{k}. \quad (11. 35)$$

Получим:

$$\begin{aligned} \bar{r}_u \cdot \bar{r}_u &= R^2 \sin^2 v, \quad \bar{r}_u \cdot \bar{r}_v = 0, \quad \bar{r}_v \cdot \bar{r}_v = R^2 \\ \text{и} \quad (ds)^2 &= R^2 \sin^2 v (du)^2 + R^2 (dv)^2. \end{aligned} \quad (11. 36)$$

Чтобы привести (11. 36) к виду (11. 34), достаточно сделать замену: $Rv = u^*$ $Ru = v^*$, т.е. $Rdv = du^*$ $Rdu = dv^*$. Получится:

$$(ds)^2 = \sin^2 \left(\frac{1}{R} u^* \right) (dv^*)^2 + (du^*)^2,$$

что совпадает с (11. 34).

Следовательно, всякая поверхность постоянной положительной кривизны K есть изгибание сферы радиуса $\frac{1}{\sqrt{K}}$ (конечно, в локальном смысле: кусочек поверхности изгибается в кусочек сферы).

При $K < 0$ решение уравнения (11. 26) дает:

$$b = \text{sh} (R \sqrt{-K}).$$

Первая квадратичная форма принимает вид:

$$(ds)^2 = (du)^2 + \text{sh}^2 (R \sqrt{-K}) (dv)^2.$$

Поверхность постоянной отрицательной кривизны может быть получена вращением трактрисы вокруг ее асимптоты, — это уже знакомая читателю псевдосфера, о которой мы рассказывали в шестой главе. Конечно, из того уравнения трактрисы, которое там приведено, доказательство постоянства гауссовой кривизны псевдосферы вывести не просто, но мы знаем, как это сделать: надо найти уравнение соответствующей поверхности вращения, затем вычислить производные радиус-вектора, коэффициенты a^2 и b^2 и применить формулу (11. 15).

Мы не будем проделывать эту выкладку, но констатируем: всякая поверхность постоянной отрицательной кривизны есть изгибание псевдосферы.

Здесь нужно сделать очень существенную оговорку: все приведенные рассуждения следует трактовать локально, т. е. речь должна идти о достаточно малых кусках поверхностей, не включающих ни особых точек и линий, ни самой поверхности (как в случае псевдосферы и торса), ни даже ее координатной сети (полюсы сферы).

Что касается вопроса об изгибании всей поверхности «в целом», то для решения возникающих здесь задач приходится применять более современный научный аппарат, чем изобретенные еще Лейбницем дифференциалы.

ОТ ГЛОБУСА ДО КАРТЫ

«Отрицательный результат—это тоже результат» — хорошо известный ученым афоризм. Одним из самых важных отрицательных результатов дифференциальной геометрии является утверждение о том, что сфера не изгибается на плоскость даже локально, так как (см. гл. XI) гауссова кривизна сферы положительна, а гауссова кривизна плоскости равна нулю. Иными словами, не существует такого отображения на плоскость, при котором сохранялись бы все расстояния. Этот факт, установленный Гауссом, служит основой математической картографии — науки об изображении земной поверхности на плоскости в виде географических карт.

Попытки изобразить на плоскости земную поверхность или хотя бы часть ее начались очень давно. Еще первобытный человек пытался сделать примитивные изображения местности, но говорить о серьезных шагах в картографии можно лишь с того момента, когда греки установили шарообразность Земли, а вслед за этим ввели сетку меридианов и параллелей. Выдающийся александрийский математик и географ Эратосфен (276—194 гг. до н. э.) вычислил длину земного меридиана. Уже упоминавшийся нами Геродот писал о множестве изображений Земли, а в «Географии» Птолемея (тоже упоминавшегося в гл. I), написанной во втором веке нашей эры, содержится 27 карт «ойкумены» (от греческого *οἰκεω* — обитаю, населяю), т. е. той части земной поверхности, которая была к этому времени известна эллинским ученым. Ойкумена простирается примерно от 63° северной широты до 16° южной широты, а по долготе ограничена западным берегом Афри-

ки и восточной частью Индийского океана. Хотя сами карты были еще очень неточны, но Птолемей придумал довольно сложную картографическую проекцию, в которой искажения расстояний в пределах ойкумены были минимальны. В современной терминологии проекция Птолемея называется псевдоконической.

Однако Птолемей жил в эпоху заката эллинской культуры. Более тысячи лет в период феодального средневековья европейцы под знаменем христовым уничтожали язычество, а с ним и научное наследие ученых античного мира. До нас большинство произведений ученых этого времени дошло лишь в арабских переводах или случайно сохранившихся отрывках.

Но вот наступила эпоха великих географических открытий (так принято называть период с середины XV до середины XVII в.). Христофор Колумб (1451—1506) открывает в 1492 г. Новый Свет — Америку. Васко да Гама (1469—1524) обгибает мыс Доброй Надежды и добирается до настоящей Индии (которую Колумб искал на западе). Васко Нуньес де Бальбоа (1475—1517) выходит на берег Тихого океана. Фернан Магеллан (1480—1521) пачинает первое кругосветное путешествие, заверщенное его спутниками, и открывает обход американского материка с юга. Почти все первооткрыватели того времени ненадолго пережили свои открытия, а многие погибли во время экспедиций. Но «*Navigare necesse est, vivere non est necesse*» — «плавать по морю необходимо, жить не так уж необходимо». Эта древняя поговорка была девизом мужественных мореплавателей XV—XVII вв.

Эпоха великих географических открытий завершилась в XVII в., когда Генри Гудзон (1550—1611) и Уильям Баффин (1584—1622) отчаялись в попытках обойти Америку с севера, а русский казак Семен Дежнев (1605—1672) открыл пролив, отделяющий Азию от Америки. На Земле осталось не так уж много «белых пятен».

В знаменитой книге Жюль Верна «История великих путешествий» показано, что за триста лет люди на утлых парусниках обошли почти весь земной шар (за исключением Антарктиды), посетили берега почти всех морей и океанов. И всюду, как умели, они наносили свои маршруты на географические карты.

Но какие карты? Хорошо владея понятиями широты и долготы, они по звездам и солнцу умели (в хорошую

погоду!) более или менее удовлетворительно определять свое местоположение. Но зафиксировать пройденный путь они умели только на глобусе, т. е. на такой модели земного шара, которая получается только при помощи гомотетии

$$H(R) = r,$$

где R — радиус земного шара, а r — радиус глобуса. Разумеется, коэффициент гомотетии $k = r : R$ очень мал. Однако все линейные размеры при этом преобразовании, как известно, уменьшаются по одному и тому же закону:

$$x = kX,$$

где x — расстояние на глобусе, X — соответствующее расстояние на Земле.

Известно, что попытки сделать такую модель предпринимались еще в глубокой древности (например, знаменитым хорезмским ученым Бируни, жившем в X—XI вв.). В год открытия Колумбом Нового Света немецкий купец и путешественник (он, в частности, открыл устье реки Конго) Мартин Бехайм изготовил «земное яблоко» — по-видимому, первый в Европе глобус (он сохранился до наших дней). Еще в XVII—XVIII вв. многие мореплаватели на своих крохотных парусниках возили огромные глобусы, что было и неудобно и мало件лезно: слишком мал был коэффициент гомотетии, очень трудно было изобразить на глобусе очертания маленьких островов, заливов и бухт, а именно знание этих «мелочей» так важно для мореплавателя.

Необходимо было научиться делать хорошие плоские карты, т. е. отображать сферу на плоскость. Эту задачу должны были решить математики.

Одним из первых картографов, серьезно опиравшихся на математику, был фламандец Герард Меркатор (1512—1594). Среди нескольких предложенных им картографических проекций, т. е. способов взаимно однозначного отображения земного шара (глобуса) на плоскость, была та, которой и до сих пор пользуются все мореплаватели и которая носит название меркаторовой. Меркатор предложил ее в 1569 г., а в 1595 г., уже после его смерти, появился сборник составленных им карт, который впервые был назван атласом.

Карты Меркатора по-прежнему были весьма неточными по той простой причине, что все еще не была разработана наука об измерениях на земной поверхности — геодезия. Только в 1615 г. Виллеброрд Снеллиус (1580—1626) предложил метод измерений на земной поверхности, дающий достаточную точность — метод триангуляции. При этом методе на поверхности Земли фиксируется большое количество хорошо наблюдаемых пунктов, служащих вершинами треугольников. Зная длину стороны хотя бы одного из таких треугольников, можно свести вычисление длин других к измерению углов и решению треугольников по формулам тригонометрии. Приборы же для измерения углов были (по крайней мере, в то время) значительно точнее, нежели приборы для измерения расстояний.

Но построение триангуляционных пунктов и организация детальных измерений — дело очень дорогостоящее, на практике оно начало осуществляться значительно позже. В конце XVII в. итальянец Джованни Доменико Кассини (1625—1712) составил новую карту Франции, причем оказалось, что площадь королевства и протяженность его границ значительно короче, чем считалось ранее. В связи с этим, поздравляя Кассини и его сотрудников с окончанием работы, Людовик XIV сказал: «Ваше путешествие, господа, стоило доброй части моего королевства».

В России картографические работы начались с момента создания Академии наук, и уже в 1734 г. И. К. Кирилловым (1689—1737) был издан «Атлас Всероссийской империи». Его дело было продолжено М. В. Ломоносовым и Леонардом Эйлером, и уже в первой половине XVIII в. российская картография по размаху и качеству превосходила западноевропейскую.

В Германии геодезическими (триангуляционными) съемками Ганноверского королевства занимался сам Гаусс, внесший в геодезию много важных теоретических дополнений и использовавший эти занятия в теоретической науке — дифференциальной геометрии. В своих занятиях прикладной математикой Гаусс следовал им же сформулированному принципу: «Нельзя считать дело сделанным, если еще кое-что осталось сделать». Этим «кое-чем» в применении к геодезическим работам была внутренняя геометрия поверхностей и теория *конформного* отображения поверхностей.

С точки зрения последней теории легко объяснить, в чем состоят сущность и достоинства проекции Меркатора. *Конформным* называется всякое отображение, при котором сохраняются углы. Мореплаватели всегда стремятся подольше держаться заданного курса, т. е. двигаться под одним и тем же углом относительно меридианов (направление которых можно определить по звездам). Если на карте меридианы изобразить прямыми линиями, то движение по заданному курсу изобразится отрезками прямых линий (на рис. 88 каждый отрезок соответствует движению с постоянным курсом). Если же карта получена конформным отображением земного шара (глобуса), то угол на карте будет равен углу, измеряемому на корабле. Ясно, что такая карта идеальна для мореплавателя. Именно такой и является карта Меркатора. Знание геометрии на поверхности дает возможность в этом убедиться.

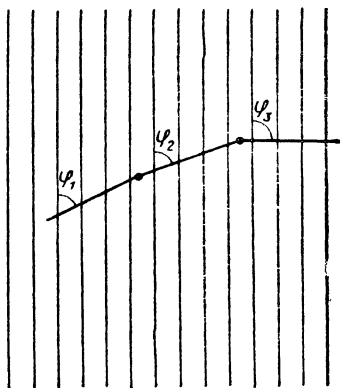


Рис. 88

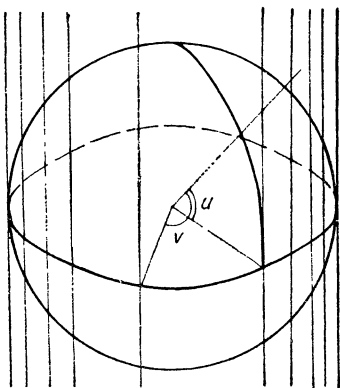


Рис. 89

Проекция Меркатора получается следующим образом. Строится цилиндр, касающийся глобуса по экватору (рис. 89). Окружности, ортогональные образующим цилиндра ставятся в соответствие параллелям глобуса. Закон соответствия может быть различным в зависимости от целей, стоящих перед картографом. Теперь остается разрезать цилиндр по одной из образующих и развернуть его на плоскость — знакомое нам изгибание, все размеры при нем сохраняются. Полученная таким образом проекция называется *цилиндрической*.

Как установить соответствие между координатами на сфере (глобусе) и на плоскости (карте)? Пусть разрез проведен по образующей, соответствующей 180° по Гринвичу (см. гл. VII). Точку пересечения нулевого (Гринвичского) меридиана с экватором примем за начало координат на плоскости, за ось абсцисс примем прямую, в которую развернется экватор, за ось ординат — образующую, соответствующую нулевому меридиану. Параллели развернутся в прямые, параллельные оси абсцисс, — на плоскости автоматически получилась ортогональная сеть прямых.

Так как развертка цилиндра на плоскость сохраняет все размеры, то нам остается рассмотреть связь между сферой и цилиндром. Если v — долгота, u — широта, a — радиус сферы и цилиндра, то

$$\bar{r} = a (\cos u \bar{e}(v) + \sin u \bar{k})$$

есть уравнение сферы, а

$$\bar{r} = a \bar{e}(v) + a \Phi(u) \bar{k}$$

— уравнение цилиндра. $\Phi(u)$ — есть функция, устанавливающая зависимость координаты на образующей (и на меридиане карты) от широты u . Она и определяет соответствие между развернутыми в прямые параллелями цилиндра и параллелями сферы. Для того чтобы сохранились углы, т. е. чтобы отображение было конформным, функция $\Phi(u)$ должна иметь вид:

$$\Phi(u) = \text{Intg} \left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4} \right).$$

Это и есть закон, по которому в проекции Меркатора отображаются параллели.

Значит, первая квадратичная форма на цилиндре (и на карте!) имеет вид:

$$(ds^*)^2 = a^2 \left(\frac{1}{\cos^2 u} (du)^2 + (dv)^2 \right),$$

а на сфере —

$$(ds)^2 = a^2 ((du)^2 + \cos^2 u (dv)^2).$$

Искажение расстояний при той или иной картографической проекции определяют отношением $\frac{ds}{ds^*}$ дифферен-

циалов длин дуг. Длина отрезка параллели ($u = \text{const}$) искажается так:

$$\left| \frac{ds^*}{ds} \right|_{u=\text{const}} = \left| \frac{1}{\cos u} \right|.$$

Значит, вдоль всей фиксированной параллели искажение одинаково, а при переходе от одной параллели к другой искажение возрастает с возрастанием широты u : на экваторе $u = 0$, $\cos u = 1$, искажения нет; при $u \rightarrow \frac{\pi}{2}$, т. е. вблизи полюса, $\cos u \rightarrow 0$ и искажение возрастает очень быстро.

Длина отрезка меридиана искажается так:

$$\left| \frac{ds^*}{ds} \right|_{v=\text{const}} = \left| \frac{1}{\cos u} \right|.$$

И это искажение увеличивается с возрастанием широты. Вот почему на карте Меркатора все длины увеличиваются по мере удаления от экватора. Еще сильнее увеличиваются площади. Их увеличение вычисляется как произведение двух линейных искажений, т. е. как $\frac{1}{\cos^2 u}$.

Вот почему на карте Меркатора Гренландия выглядит такой же большой, как Южная Америка, хотя на самом деле площадь Гренландии — самого большого на земле острова — около двух миллионов квадратных километров, а площадь Южной Америки — почти 13 миллионов квадратных километров, т. е. превосходит площадь Гренландии более чем в шесть раз. Карта Меркатора для измерения длин и площадей не годится! Но она не для того и предназначена! Тем, кто провозгласил «*Navigare necesse est*» важно было найти новые земли, плыть в нужном направлении, а уж точное измерение этих земель и расстояний до них — дело последующих поколений.

Чтобы получить карту с как можно меньшим искажением длин, используют более сложные картографические проекции. Важнейшими среди них являются конические: вокруг глобуса описывают не цилиндр, а конус, касающийся глобуса по некоторой параллели. Тогда соответствующая конформная проекция будет давать незначительное искажение для местностей, расположенных близ этой параллели, по той же причине, по которой в

случае цилиндрической проекции минимальное искажение получается близ экватора. В картографии конформные отображения называют *равноугольными*. Поэтому под большинством карт областей Советского Союза можно прочесть: равноугольная коническая проекция. Очевидно, что конические проекции особенно пригодны для карт тех стран и областей, которые вытянуты вдоль параллели. Вот почему уже во времена Эйлера карты «Атласа Российского» выполнялись в конических проекциях.

Конечно, для карт Арктики, Антарктики и всего мира с целью сохранения более или менее реального соотношения размеров приходится применять еще более сложные картографические проекции, о которых мы не будем рассказывать. В них приходится учитывать и то, что Земля все-таки не шар, и даже не просто сплюснутый у полюсов эллипсоид вращения, а так называемый геоид. И тем не менее в основе всей современной математической картографии лежит гауссова теория отображений поверхностей друг на друга, т. е. дифференциальная геометрия.

Послесловие

Читатель, преодолевший трудности предыдущих глав нашей книги, конечно, обратил внимание на яркую, убедительную и имеющую практическое значение идею Гаусса о выделении фактов внутренней геометрии из всей теории поверхностей. Не удивительно, что еще при жизни Гаусса эта идея получила глубокое обобщение. Это произошло в 1854 г., когда молодой математик Бернгард Риман (1826—1866) прочел публичную лекцию «О гипотезах, лежащих в основании геометрии». Текст ее был опубликован лишь в 1868 г., уже после смерти Римана.

Этот замечательный математик прожил недолгую трудную жизнь и скончался от туберкулеза, когда ему еще не минуло и сорока лет. Но он оставил будущим поколениям бесценное наследство: основы целого ряда теорий, внешне сугубо абстрактных, но получивших широчайшее применение не только в математике, но и в теоретической физике. И когда великий физик Альберт Эйнштейн (1879—1955) начал разработку общей теории относительности, он тотчас обратил внимание на ту геометрическую модель, которая уже получила название *римановой геометрии* и основы которой как раз и были изложены в лекции Римана.

В наше время риманова геометрия является одной из важнейших ветвей современной дифференциальной геометрии. Более того, вся современная теория дифференцируемых многообразий (так теперь называют то, что еще недавно именовалось дифференциальной геометрией) имеет своим источником идеи Римана, а следовательно и идеи классической теории поверхностей.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие

3

Глава первая

**ОТ ЕВКЛИДА ДО ЛЕЙБНИЦА, ОТ КАСАТЕЛЬНОЙ
ДО ДИФФЕРЕНЦИАЛОВ**

7

Глава вторая

ОТ ВЕКТОРА — К ВЕКТОРУ-ФУНКЦИИ

24

Глава третья

ОТ ДИФФЕРЕНЦИАЛОВ — К ФОРМУЛЕ ТЕЙЛОРА

45

Глава четвертая

ОТ ПРОСТЕЙШИХ КРИВЫХ — К РЕПЕРУ ФРЕНЕ

59

Глава пятая

ОТ КАНОНИЧЕСКОГО РЕПЕРА — К ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫМ ФОРМУЛАМ

73

Глава шестая

ОТ ВИНТОВОЙ ЛИНИИ — К ТРАКТРИСЕ

91

Глава седьмая

ОТ ПОЛЯРНОЙ ЗВЕЗДЫ — К КООРДИНАТАМ НА ПОВЕРХНОСТИ

111

Глава восьмая

ОТ ОРТОГОНАЛЬНОЙ СЕТИ — К РЕПЕРУ ЛИНИИ НА ПОВЕРХНОСТИ

129

Глава девятая

ОТ ЛИНИЙ НА ПОВЕРХНОСТИ — К КАНОНИЧЕСКОМУ РЕПЕРУ

139

Глава десятая

ОТ ТОРСА ДО ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ

156

Глава одиннадцатая

ВНУТРЕННЯЯ ГЕОМЕТРИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ

169

Глава двенадцатая

ОТ ГЛОБУСА ДО КАРТЫ

183

ПОСЛЕСЛОВИЕ

191

25 к.

